

ACTA PHYSICA AUSTRIACA

UNTER MITWIRKUNG DER

ÖSTERREICHISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN VON

FRITZ REGLER UND HANS THIRRING

WIEN

WIEN

SCHRIFTLEITUNG

PAUL URBAN

GRAZ

12. BAND 2. HEFT

MIT 36 ABBILDUNGEN

(AUSGEGEBEN IM OKTOBER 1958)



WIEN
SPRINGER-VERLAG
1958

Die **Acta Physica** erscheinen zwangsläufig nach Maßgabe der einlaufenden Arbeiten in Heften wechselndem Umfanges, die zu Bänden von 400 bis 500 Seiten vereinigt werden. Arbeiten können in den Sprachen der internationalen Kongresse erscheinen.

Manuskripte sind entweder an die Schriftleitung der „*Acta Physica Austriaca*“, Prof. Dr. PAUL URBAN, Graz, Universitätsplatz 5, oder an den Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5, zu richten; alle geschäftlichen Mitteilungen an den Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5, Tel. 63 76 71 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 100 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 100 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Allgemeine Richtlinien für die Abfassung von Beiträgen: Die Arbeit soll klar und verständlich geschrieben sein. Es ist Rücksicht auf jene Leser zu nehmen, die nicht mit demselben Problem vertraut sind. Auch ohne übermäßige und nicht verantwortbare Breite der Darstellung kann häufig ein eingefügter kleiner Satz dem Leser eine Stunde Nachdenken ersparen. Jede Niederschrift soll ein Ringen um das richtige Wort an der richtigen Stelle sein. Die Herausgeber erachten es als ihre Pflicht, Abhandlungen, die nach ihrem Dafürhalten den üblicherweise zu stellenden Anforderungen in dieser Hinsicht nicht voll entsprechen, zur Umarbeitung zurückzusenden.

Umfang: Obere Grenze etwa ein Druckbogen; längere Abhandlungen sind zu unterteilen.

Außere Form: Maschinenschrift; einseitig beschriebene, fortlaufend bezifferte Blätter, linksseitig mit breitem freiem Rand.

Titelkopf: Titel der Arbeit (soll bereits unmißverständlich kennzeichnend für den behandelten Gegenstand sein). Darunter der Name des Verfassers mit ausgeschriebenem Vornamen. Darunter Angabe des Institutes, aus dem die Arbeit stammt, oder Privatanschrift des Verfassers; darunter „Mit ... Abbildungen.“.

Zusammenfassungen: Der Abhandlung vorangestellt wird eine zusammenfassende Übersicht in Kleindruck. Sie dient als einführender erster Überblick für den Leser und als Vorlage für die Referatenblätter. Die Übersicht soll trotz gedrängter Darstellung alles enthalten, was der Verfasser an seiner Arbeit in Bezug auf Problemstellung, Methodik und Ergebnisse für unerlässlich zu ihrer Beurteilung hält. Zu einer Beurteilung auch durch den Nichtfachmann!

Tabellen: Die Übersichtlichkeit einer Tabelle und damit das Erreichen ihres Zweckes kann sehr gefördert werden durch Sorgfalt in der Wahl der Überschriften sowohl für die Tabelle als Ganzes als für die einzelnen Zeilen und Spalten. Die gewählten Einheiten müssen klar ersichtlich, die Abkürzungen verständlich sein.

Abbildungen: Sie müssen, wenn auch nur skizziert, doch so weit ausgeführt sein, daß für den dem Thema fernstehenden Verlagszeichner keine Unklarheiten bestehen. Jede Zeichnung ist zu beschriften; die Beschriftung soll das Lesen der Zeichnung auch ohne langes Suchen im Text ermöglichen. Sie ist, als Beschriftung der Abb. Nr. kenntlich gemacht, an der gewünschten Stelle des Textes einzufügen. Die Zeichenvorlage ist der Abhandlung auf gesondertem Blatt, das zwecks Vermeidung von lastigen Verwechslungen durch Autorennamen und Arbeitstitel gekennzeichnet sein soll, beizulegen. Man vergesse nicht, daß Figurenwiedergabe und Textherstellung zwei gesonderte Arbeitsgänge sind, die erst nach der ersten Korrektur zusammenlaufen.

Fortsetzung auf der III. Umschlagseite

12. Band/2. Heft

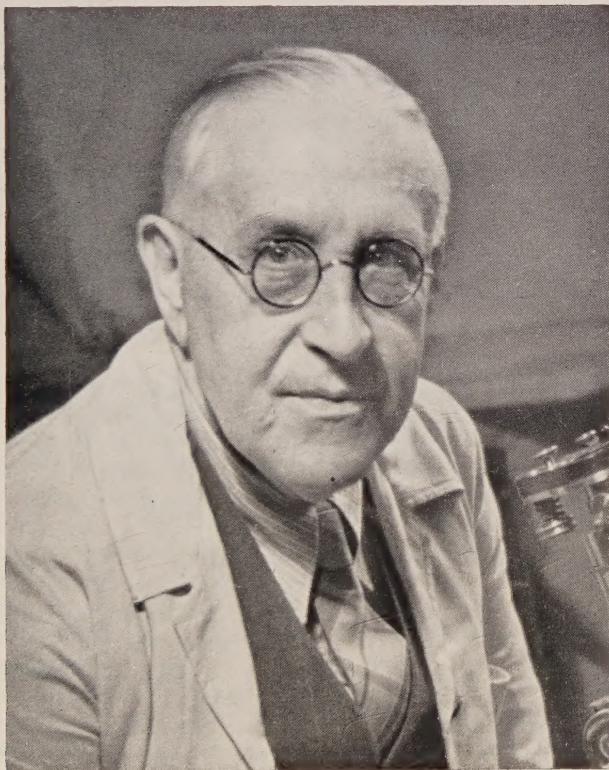
Inhaltsverzeichnis

Seite

Steinmaurer, R. VICTOR F. HESS zum 75. Geburtstag	121
Stippel, H. Die Verwendung von Dipolsingularitäten bei der Berechnung heterogener Reaktoren	123
Ledinegg, E. und P. Urban. Zur Theorie der NÉELSchen Kette	144
Székely, A. Untersuchung eines ionisierten Gases mittels schwacher elektrischer Wechselfelder	155
Preining, O. Ein Wellenleiter für Oberflächenwellen von Flüssigkeiten	172
Gross, B., A. Aron, E. Meyer, F. X. Roser, S. Costa Ribeiro und A. C. Olinto. Fallout Particles of High Specific Activity	187
Ledinegg, E. Zur Theorie des Impulsdurchgangs in einem 2 n-Pol-Hohlraumsystem	196
Buchbesprechungen	205

Victor F. Hess zum 75. Geburtstag

Am 24. Juni vollendete Prof. Dr. VICTOR F. HESS sein 75. Lebensjahr. Die österreichischen Physiker gratulieren ihm als dem Entdecker der Kosmischen Strahlung, als einem der drei gebürtigen Österreicher,



die mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet würden und nicht zuletzt als einem liebenswürdigen und stets hilfsbereiten Menschen und hervorragenden akademischen Lehrer.

Der Lebenslauf des in Waldstein in der Steiermark geborenen Jubilars, der an den Hochschulen in Wien, Graz und Innsbruck lehrte

und seit 1938 bis zu seiner vor kurzem erfolgten Emeritierung an der Fordham-Universität in New York eine Lehrkanzel inne hatte, wurde anlässlich seines 70. Geburtstages geschildert und sein wissenschaftliches Werk eingehend gewürdigt¹.

Fortschritte und Weiterentwicklung der Physik in dem seither verflossenen Jahrfünft haben erneut die grundlegende Bedeutung der HESSschen Entdeckung der Kosmischen Strahlung und ihren Einfluß auf die Nachbargebiete, besonders auf die Kernphysik, erwiesen. In den ersten Jahren kaum beachtet und während des ersten Weltkrieges fast vergessen, rückte die Strahlung, als 1929 ihre Teilchennatur erkannt war, mit einem Schlag in den Brennpunkt des Interesses weitester Kreise. Auf Nebelkammeraufnahmen der Kosmischen Strahlung — vielfach wird sie auch Höhenstrahlung oder Ultrastrahlung genannt² — entdeckte C. D. ANDERSON das Positron und einige Jahre darauf das μ -Meson. Die Wiener Physikerinnen BLAU und WAMBACHER fanden die ersten Zertrümmerungssterne und in der Kosmischen Strahlung wurden nach dem zweiten Weltkrieg die π - und K -Mesonen und die verschiedenen Arten von Hyperonen gefunden. Wenngleich man heute die energieärmeren Teile der Strahlung im Laboratorium künstlich erzeugen kann, so steht doch die Kosmische Strahlung auf dem Gebiete der höchstenergetischen Kernphysik, als Quelle von Teilchen mit Energien von 10^{18} eV konkurrenzlos da. Die Fragen nach dem Ursprung und nach dem Mechanismus der Beschleunigung, nach dem Schicksal der Strahlung im Kosmos vor dem Auftreffen auf die Erdatmosphäre, stellen Probleme dar, die noch nicht bedriedigend gelöst sind.

Es ist erfreulich, daß es HESS vergönnt ist, diese großartige Entwicklung mitzuerleben, die von seiner Entdeckung ausging und die er wohl nie vorausahnen konnte. Wertvolle Beiträge zur Erforschung seiner Strahlung leistete er selbst während seiner Tätigkeit in Österreich und in den USA und auch heute noch verfolgt HESS mit großem Interesse nicht nur alle Fortschritte, die seine Strahlung betreffen, sondern er ist selber auch auf anderen Wissensgebieten noch experimentell tätig.

In den Jahren nach 1938 ist HESS Amerikaner geworden, doch er blieb stets seiner Heimat verbunden. Nach Kriegsende besuchte er wiederholts Österreich, im Sommer 1948 lehrte er als Gastprofessor an der Universität Innsbruck. Auch zur Feier seines 75. Geburtstages beabsichtigte er nach Österreich zu kommen. Seinen österreichischen Freunden, Schülern und Verehrern wird es eine besondere Freude sein, ihn in seiner Heimat begrüßen und ihm persönlich ihre Geburtstagswünsche übermitteln zu können.

R. STEINMAURER, Innsbruck

¹ Acta Phys. Austr. 7, 209—215, 1953.

² Es wäre sehr zu begrüßen, wenn sich die Physiker auf eine einheitliche Art der Bezeichnung der Strahlung einigten. Hess verwendet den Namen „Kosmische Strahlung“, dessen englische Übersetzung in der anglo-amerikanischen Literatur ausschließlich gebraucht wird.

Die Verwendung von Dipolsingularitäten bei der Berechnung heterogener Reaktoren*

Von

H. Stippel

Institut für Theoretische Physik der Universität Graz

Mit 1 Abbildung

(Eingegangen am 8. Februar 1958)

I. Einleitung

Die Berechnung der Neutronenverteilung und der kritischen Daten einer heterogenen Spaltstoffanordnung stellt naturgemäß ein weitaus komplizierteres Problem dar wie die eines homogenen Systems. Während in das erstere auch die Art der geometrischen Anordnung der verschiedenen Materialien eingeht, spielen bei letzterem nur über größere Raumgebiete konstante mittlere Wirkungsquerschnitte aller enthaltenen Atomsorten eine Rolle. Da wegen der komplexen Struktur des Neutronenverteilungsvorganges die Lösung des Kritizitätsproblems schon bei homogenen Anordnungen eine schwierige Aufgabe ist, die nur unter Annahme verschiedener Näherungsgesichtspunkte approximativ gelöst werden kann, führt ein stärkerer Ansatz für das Kritizitätsproblem einer heterogenen Spaltstoffanordnung zu Gleichungen, die so viele Parameter enthalten, daß ihre Lösung auch mit den modernsten elektronischen Rechenhilfen hoffnungslos erscheint. Dies rechtfertigt die Verwendung von Zusatzmaßnahmen. Um zu einer Vereinfachung des Problems zu gelangen, bestehen zwei voneinander grundverschiedene Möglichkeiten: Einerseits kann man von einer Mittelwertbildung für die Neutronenwirkungsquerschnitte und alle anderen daraus abgeleiteten Parameter wie Diffusionslängen, Spaltwirkungsgrad, Resonanzabsorption u. a. m. ausgehen und das Problem damit auf das einer homogenen Spaltstoffanordnung zurückführen, wobei die erste Näherung der Feinstruktur der Neutronendichten in den Mittelungsprozeß eingeht. Dieses Verfahren ist als Zellularmethode bekannt und entstammt seiner Grundkonzeption nach einer Arbeit von E. P. WIGNER und F. SEITZ zur theoretischen Behandlung von Kristallgittern. Andererseits können die Stellen mit besonders hohen Spalt- und Absorptionsquerschnitten

* Herrn Professor Dr. VICTOR F. HESS zum 75. Geburtstag gewidmet.

zu Singularitäten des Problems idealisiert werden, deren Stärke von den Neutronendichten in ihrer Umgebung abhängig ist. Diese Annahme führt zu einer Quellen- und Senken-Methode. Es mag interessieren, daß sich die beiden Möglichkeiten der Behandlung auch hinsichtlich ihres geographischen Ursprungs unterscheiden: Die Zellularmethode wurde vor allem in den Vereinigten Staaten im Verlaufe des geheimgehaltenen Manhattan-Projektes erstmals zur Berechnung von Reaktoranordnungen verwendet, während die Quellen- und Senken-Methode ihre Entstehung vornehmlich den etwas später publizierten Arbeiten russischer Forscher verdankt.

Die Zellularmethode wurde bis zu einer gewissen Abgeschlossenheit entwickelt und den Feinheiten zahlreicher praktischer Anwendungen angepaßt, während die Quellen- und Senken-Methode mit wenigen Ausnahmen ein noch ziemlich akademisches Hilfsmittel blieb. Dies mag zum Teil in ihrer abstrakteren mathematischen Natur liegen, zum anderen Teil aber auch in der Tatsache, daß die sehr weitmaschigen Brennstoffgitter, für deren Berechnung sie in ihrer ursprünglichen Form am besten geeignet ist, immer mehr durch die in fast allen Reaktoren mit angereichertem Uran zur Verwendung kommenden dichtgepackten Brennstoffgitter abgelöst wurden. Die Erkenntnis dieses Umstandes war der Anlaß zur vorliegenden Arbeit. In Anordnungen, bei denen die Abmessungen der einzelnen Brennstoffelemente nicht mehr zu klein gegenüber deren Abständen vorausgesetzt werden können, wird die Behandlung der Brennstoffelemente als reine, hochsymmetrische Quellen und Senken für Neutronen nicht mehr zur Erfassung ihrer für den Neutronenhaushalt maßgeblichen Eigenschaften ausreichen. Es entstand der Wunsch nach einer genaueren Beschreibung eines Einzelementes der Anordnung im Sinne einer Singularitätenmethode.

Die ersten Ansätze zu einer Behandlung des Neutronenverteilungsproblems als Gleichgewichtszustand einer Anordnung untereinander abhängiger Quellen und Senken findet man bereits in der Methode von NORDHEIM und SCARLETTAR (vgl. 1), in der der Einfluß von Regelstäben auf den Neutronenfluß in einer Reaktoranordnung durch lokale Senken berücksichtigt wird. Wie aus einer Bemerkung von P. F. GASTI auf der Genfer Konferenz 1955 hervorgeht (2), entwickelte man in den USA auch frühzeitig eine einfache Quellen- und Senkenmethode zur Berechnung der Kritizität von Uranstabanordnungen in Graphit als Moderator und verwendete die Berechnungen zur Konstruktion eines entsprechenden Reaktors. Die detailliertesten Arbeiten, die sich mit der Anwendung von Singularitätenmethoden auf Reaktorprobleme befassen, wurden jedoch erst auf der Genfer Konferenz 1955 veröffentlicht. (3—7). Soweit aus dieser Literatur ersichtlich ist, beschränkt sich die Anwendung auch auf Uran-Graphitsysteme.

II. Grundgedanken der Quellen-Senken-Methode

Wir wiederholen zunächst die Voraussetzungen und die Vorgangsweise, welche im Falle einer „heterogenen“ Methode zu einer kritischen

Gleichung führen und beschränken uns dabei vorläufig auf die Behandlung von Spaltanordnungen in denen die überwiegende Mehrzahl der Spaltungen durch thermische Neutronen verursacht wird. Ein thermischer heterogener Reaktor wird zunächst als Anordnung spaltbaren Materials in einem unendlich ausgedehnten Moderatormaterial betrachtet. (Die Annahme eines endlichen Moderatorvolumens oder eines Reflektormaterials mit Eigenschaften, die von denen des Moderatormaterials abweichen, macht das Problem wesentlich komplizierter). Die Stäbe oder Stücke spaltbaren Materials werden hinsichtlich ihres Beitrages zum Neutronenhaushalt als Linien- resp. Punktquellen für schnelle Neutronen und als Linien resp. Punktsenken für thermische Neutronen aufgefaßt. Um die zylindrische oder Kugel-Symmetrie des Neutronenfeldes in der Umgebung der Brennstoffelemente zu garantieren, sollen diese auch annähernd zylindrisch, resp. kugelförmig geformt sein. Der erstere Fall ist für praktische Anwendungen bei weitem wichtiger und wir wollen uns der Einfachheit halber auf ihn beschränken.

Zur Berechnung der Diffusion von Neutronen zwischen den Brennstoffelementen verwenden wir zunächst die einfache Diffusionstheorie. Diese vereinfachende Annahme ist gerechtfertigt, wenn die Absorption im Moderator klein ist und die Gitterabstände groß sind im Vergleich zur mittleren freien Weglänge der Neutronen im Moderator.

Eine weitere, jedoch meist erfüllte Voraussetzung betrifft die Proportionalität des thermischen Neutronenflusses an der extrapolierten Oberfläche jedes Brennstoffelementes zur Zahl der in der Zeiteinheit absorbierten thermischen Neutronen innerhalb des Brennstoffelementes, oder mit anderen Worten, zur Stärke der Senke für thermische Neutronen.

Die Anwesenheit einer lokalen (δ -funktionsartigen) Senke der Stärke i am Orte \vec{r}_0 erniedrigt den Neutronenfluß in den verschiedenen Gebieten der Anordnung um einen Beitrag, der gegeben ist durch das Produkt von Senkenstärke i und GREEN'scher Funktion für das spezielle Diffusionsproblem, also

$$i \cdot f(|\vec{r} - \vec{r}_0|). \quad (1)$$

Die Gleichung für die GREEN'sche Funktion der stationären Diffusionsgleichung lautet

$$D \Delta f(|\vec{r} - \vec{r}_0|) - \Sigma_c f(|\vec{r} - \vec{r}_0|) = -\delta_3(\vec{r} - \vec{r}_0). \quad (2)$$

Dabei ist D der Diffusionskoeffizient und Σ_c der gesamte Absorptionsquerschnitt des Mediums für thermische Neutronen. $\delta_3(\vec{r} - \vec{r}_0)$ bezeichnet die DIRAC'sche δ -Funktion.

Für den zylindersymmetrischen Fall und eine Linienquelle

$$\delta_2(\vec{r} - \vec{r}_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_3(\vec{r} - \vec{r}_0) dz_0$$

wird sie nach Abspaltung der Längskoordinate $z[r = (\varrho, \varphi, z)]$, von der das Problem bei Annahme unendlich langer Stäbe gar nicht abhängt (es kann gezeigt werden, daß man auch im Fall endlich langer Stäbe die Abseparation der Längskoordinate durchführen kann, wenn auch nur als Näherungsansatz):

$$D \Delta f(|\vec{\varrho} - \vec{\varrho}_0|) - \Sigma_c f(|\vec{\varrho} - \vec{\varrho}_0|) = -\delta_2(\vec{\varrho} - \vec{\varrho}_0). \quad (3)$$

Dabei ist

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

der zweidimensionale Laplaceoperator in Polarkoordinaten.

Es ist leicht gezeigt, daß die Ausbreitungsfunktion einer unendlich langen Linienquelle im räumlich unbegrenzten Medium

$$f(|\vec{\varrho} - \vec{\varrho}_0|) = \frac{K_0(|\vec{\varrho} - \vec{\varrho}_0|/L)}{2\pi L^2 \Sigma_c} \quad (4)$$

lautet.

Dabei bedeutet $|\vec{\varrho} - \vec{\varrho}_0|$ den Normalabstand des Aufpunktes zur Liniensingularität.

Die physikalische Bedeutung der Ausbreitungsfunktion liegt darin, daß sie den Neutronenfluß im Medium zufolge einer bei $\vec{\varrho}_0$ befindlichen Linienquelle der Stärke 1 (1 Neutron pro Sekunde pro cm Länge der Linienquelle) angibt. Da im stationären Fall alle in der Quelle erzeugten Neutronen irgendwo im Medium wieder absorbiert werden, muß

$$\Sigma_c \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{K_0(R/L)}{2\pi L^2 \Sigma_c} R dR d\Omega = 1 \quad (5)$$

sein, (da das Produkt aus Neutronenfluß und Wirkungsquerschnitt ja die Anzahl der Absorptionsen angibt) was man auch tatsächlich leicht nachweisen kann:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty K_0\left(\frac{R}{L}\right) \cdot \left(\frac{R}{L}\right) \cdot d\left(\frac{R}{L}\right) = \int_0^\infty K_0(x) x dx = \\ & = \int_0^\infty \left\{ \int_1^\infty e^{-tx} (t^2 - 1)^{-1/2} dt \right\} x dx = \end{aligned}$$

(Integraldarstellung von $K_0(x)$; da $\int_0^\infty e^{-tx} x dx$ gleichmäßig konvergiert

für $\operatorname{Re}(t) > 0$, folgt:

$$\begin{aligned} &= \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} \int_0^\infty e^{-tx} x dx \cdot dt = \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} \cdot \frac{dt}{t^2} = \\ &= \int_0^1 \frac{z dz}{\sqrt{1 - z^2}} = - \left[\sqrt{1 - z^2} \right]_0^1 = 1. \end{aligned}$$

Σ_f/Σ_a bezeichne den Quotienten aus Spaltwirkungsquerschnitt zu Gesamt-Absorptionswirkungsquerschnitt des Spaltmaterials. Der Bruchteil Σ_f/Σ_a der im Brennstoff absorbierten thermischen Neutronen ruft weitere Spaltungen hervor und führt zu einer Quelle schneller Neutronen innerhalb desselben Brennstoffelementes. Die Quellenstärke eines Brennstoffstabes für schnelle Neutronen ist deshalb $\eta = r \Sigma_f/\Sigma_a$ mal der Senkenstärke i desselben Stabes für langsame Neutronen, wobei r die Anzahl der Spaltneutronen pro absorbiertes thermisches Neutron bezeichnet. Die schnellen Neutronen entkommen zum Großteil in den Moderator und verlieren ihre Energie durch Zusammenstöße mit dessen Atomkernen. Die über den ganzen Raum verteilte Quellstärke der abgebremsten Neutronen ist gegeben durch das Produkt der Quellstärke der Spaltneutronen $i \cdot \eta$ mit einer GREEN'schen Funktion der Gleichung des Abbremsvorganges. Wählen wir zu dessen Beschreibung die FERMI'sche Theorie der kontinuierlichen Abbremsung, so erhalten wir für den Fall einer unendlich ausgedehnten Linienquelle

$$G(|\vec{\varrho} - \vec{\varrho}_0|, \tau_{th}) = \frac{p(\tau_{th})}{4 \pi \tau_{th}} e^{\frac{|\vec{\varrho} - \vec{\varrho}_0|^2}{4 \tau_{th}}} \quad (6)$$

Dabei bedeutet $p(\tau_{th})$ das Absorptionsintegral und τ_{th} das FERMIalter thermischer Neutronen. (vgl. 1).

Es muß erwähnt werden, daß es nicht ganz korrekt ist, im Falle eines endlichen Brennstoffgitters für die Gitterregion (den Reaktorkern) und den äußeren Moderator dasselbe FERMIalter zu verwenden, da ja das zur Moderierung zur Verfügung stehende Volumen in diesen beiden Bereichen verschieden ist. Dieser Umstand und eine ähnliche Situation bei der Zuordnung geeigneter thermischer Diffusionslängen macht die Verwendung der heterogenen Methoden in dieser Form bei der Berechnung dichterer Brennstoffgitter ziemlich problematisch.

Die oben angegebene Verteilung abgebremster Neutronen macht nun noch den Diffusionsvorgang bei thermischer Energien mit. Die Verteilung der thermischen Neutronen, die als schnelle Neutronen im betreffenden Brennstoffelement geboren wurden, ist damit im stationären Fall gegeben durch

$$i_0 \eta_0 \cdot \iint_{\substack{(gesamter Raum)}} G(|\vec{\varrho}' - \vec{\varrho}_0|, \tau_{th}) f(|\vec{\varrho} - \vec{\varrho}'|) d_2 \vec{\varrho}' \equiv i_0 \eta_0 F(|\vec{\varrho} - \vec{\varrho}_0|) \quad (7)$$

Die Integralkerne der Abbremsung und der Diffusion werden also „gefaltet“. Dabei wurde angenommen daß die Abbremsvorgänge durch das Vorhandensein des Brennstoffes nicht wesentlich geändert werden. Nimmt der Brennstoff größeren Raum ein, ist also das Volumen der Brennstoffstäbe gegen das des Moderators nicht zu vernachlässigen und wird im Brennstoff nicht moderiert, so ist es exakter, nur über das Moderatorvolumen zu integrieren.

Wenn wir nun die Quellenbeiträge aller Brennstoffelemente addieren und davon die Senkenbeiträge subtrahieren, so erhalten wir einen Ausdruck für die Neutronenflußverteilung in der Anordnung:

$$\phi(\vec{\varrho}) = \sum_{k=1}^N i_k \{ \eta_k F(|\vec{\varrho} - \vec{\varrho}_k|) - f(|\vec{\varrho} - \vec{\varrho}_k|) \} \quad (8)$$

Dabei ist N die Gesamtanzahl der Brennstoffstäbe und $\vec{\varrho}_k$ sind deren Ortsvektoren. Die Größen i_k sind natürlich noch unbekannt. Es ist jedoch einleuchtend, daß die Zahl der Neutonen, die in einem bestimmten Volumselement pro Zeiteinheit absorbiert werden, proportional dem örtlichen Neutronenfluß ist. Mit anderen Worten, die Stärke einer Senke für Neutronen ist proportional dem Neutronenfluß in ihrer Umgebung. Da in unserem mathematischen Modell der Fluß an der Stelle der Senken Singularitäten aufweist, und wir außerdem die Endlichkeit der Stabdicke berücksichtigen wollen, wird der Flußvergleich an der (extrapolierten) Staboberfläche vorgenommen. Falls der Neutronenfluß entlang der Oberfläche des Stabes als konstant angenommen werden kann, setzen wir

$$i_n = \frac{1}{\gamma_n} \cdot \phi(\vec{S}_n) \quad (9)$$

wobei $\vec{S}_n = \vec{\varrho}_n + \vec{R}_n$ irgendeinen Punkt an der Oberfläche des n -ten Stabes bedeutet.

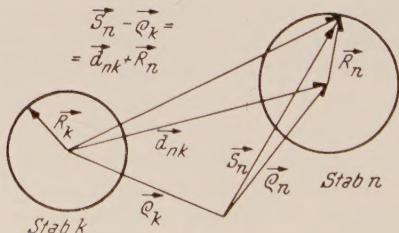


Abb. 1

Die Bestimmung der Konstanten γ_n kann entweder durch Methoden der Diffusions- oder Transporttheorie oder durch ein geeignetes Experiment geschehen. Die Diffusionsnäherung für γ_n berechnen wir in einem späteren Abschnitt.

Wir substituieren also für $\phi(\vec{S}_n)$ den Ausdruck $i_n \cdot \gamma_n$.

Die allgemeine Formel liefert dann ein System homogener linearer Gleichungen für die Unbekannten i_n

$$i_n \gamma_n = \sum_{k=1}^N i_k \{ \eta_k F(|\vec{S}_n - \vec{\varrho}_k|) - f(|\vec{S}_n - \vec{\varrho}_k|) \}. \quad (10)$$

Wir bemerken, daß eine verschiedene Wahl der Punkte \vec{S}_n im Allgemeinen zu verschiedenen Gleichungssystemen führt, da die Funktionen $F(|\vec{S}_n - \vec{\varrho}_k|)$ und $f(|\vec{S}_n - \vec{\varrho}_k|)$ nicht dieselben Werte für die verschiedenen \vec{S}_n haben.

Wir werden später sehen, daß sich diese Schwierigkeit leicht durch eine Änderung in der Definition der γ_n beheben läßt. Mit der obigen Definition ist das Vorgehen nur korrekt, wenn die Durchmesser der Stäbe sehr klein sind gegen deren Entfernung. Tatsächlich wird in den zitierten russischen Arbeiten auch

$$\vec{S}_n - \vec{\varrho}_k = \vec{\varrho}_n + \vec{R}_n - \vec{\varrho}_k \approx \vec{\varrho}_n - \vec{\varrho}_k = \vec{d}_{nk}$$

gesetzt, (\vec{d}_{nk} ist somit der Abstand der Stabzentren der Stäbe n und k) und damit

$$\begin{aligned} F(|\vec{S}_n - \vec{\varrho}_k|) &\approx F(d_{nk}) && \text{für } n \neq k \\ &= F(R_n) && \text{für } n = k \\ f(|\vec{S}_n - \vec{\varrho}_k|) &\approx f(d_{nk}) && \text{für } n \neq k \\ &= f(R_n) && \text{für } n = k \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem wird dann eindeutig:

$$i_n \gamma_n = \sum_{k \neq n} i_k \{ \eta_k F(d_{nk}) - f(d_{nk}) \} + i_n \{ \eta_n F(R_n) - f(R_n) \}. \quad (11)$$

Wenn eine nichtriviale Lösung für die Stärke der Senken existieren soll, also ein stationärer Zustand vorliegt, muß die Determinante dieses Gleichungssystems verschwinden. Verwenden wir die Abkürzungen

$$\begin{aligned} a_{nk} &= \eta_k F(d_{nk}) - f(d_{nk}) && \text{für } n \neq k \\ \eta_n F(R_n) - f(R_n) & && \text{für } n = k \end{aligned} \quad (12)$$

so schreibt sich die Bedingung für Kritizität

$$|a_{nk} - \gamma_n \delta_{nk}| = 0 \quad (13)$$

(δ_{nk} ist das Kroneckersymbol).

Dies ist nun in der Tat ein transzendentales Gleichungssystem welches eine der Konstanten γ_i , η_i , R_i , L oder τ_{th} zu berechnen gestattet, wenn alle anderen bekannt sind. Theoretisch kann also die kritische Gleichung für jeden dieser Parameter gelöst werden, aber in praktischen Fällen ist dies am einfachsten für eines der γ_i .

Die direkte Berechnung der Determinante ist natürlich nur möglich, wenn die Anordnung aus einer verhältnismäßig kleinen Anzahl von

Stäben besteht. Eine Symmetrie des Gitters reduziert allerdings die Zahl der Gleichungen und damit die Ordnung der Determinante beträchtlich. Eine Behandlung von unendlich ausgedehnten Gittern und zusammengesetzten Gittern wird mit Hilfe von Fouriertransformationsmethoden möglich.

In dieser Arbeit sind wir hauptsächlich an Systemen mit sehr kleiner Anzahl von Stäben interessiert.

Weiters soll erwähnt werden, daß in einer Quellen-Methode auch die Zahl der Stäbe als Unbekannte angenommen werden kann, wenn die Orte, an welche diese Stäbe eventuell gelangen, bekannt sind. Auf diese Weise wäre es möglich, dem Vorgehen eines kritischen Experimentes in viel engerem Sinne zu folgen, als es mit den üblichen Hilfsmitteln der Zellenmethode und Homogenisierung möglich ist. Wenn einmal die Werte aller Funktionen tabuliert sind und eine elektronische Rechenmaschine zur Lösung der linearen Gleichungen herangezogen werden kann so wäre dies mit einem relativ geringen Mehraufwand an Rechenarbeit möglich.

III. Verallgemeinerung des Verfahrens auf Dipolwechselwirkungen zwischen den Brennstoffstäben

Der im vorigen Abschnitt angegebene Vorgang beruht auf den Annahmen, daß die Stabdurchmesser sehr klein seien im Verhältnis zu den Abständen der einzelnen Stäbe, und daß der Neutronenfluß in der Nachbarschaft jedes Stabes zylindersymmetrisch um dessen Achse sei.

Die Gründe für die erste Annahme sind verschiedener Natur. Erstens soll das Verhältnis von Moderatorvolumen zu Brennstoffvolumen groß sein, damit die Vorgänge der Bremsung und Diffusion von Neutronen mit den üblichen Integralkernen vom Faltungstyp beschrieben werden können, die ja eigentlich nur für homogene unendlich ausgedehnte Medien gerechtfertigt sind. Zweitens sollen sich die Stäbe nicht so nahe beinander befinden, daß man zur Berechnung ihrer Wechselwirkungen unbedingt Methoden der Transporttheorie benötigt.

Drittens sollen sich die Beiträge der Nachbarstäbe zum Neutronenfluß entlang der Oberfläche eines Brennstoffstabes nicht viel ändern, mit anderen Worten, der Stabdurchmesser soll klein sein im Vergleich zum Gradienten des Neutronenfeldes im umgebenden Moderator.

Diese letzte Wurzel der ersten Annahme und damit auch die zweite Annahme sind in der folgenden Verallgemeinerung nicht mehr notwendig.

Betrachten wir einen Brennstoffstab in einem äußeren Neutronenfeld, das nicht räumlich konstant ist, sondern in der Nähe des Stabes einen merklichen Gradienten aufweist. Eine Näherung für den thermischen Neutronenfluß an der Staboberfläche wird dann dargestellt durch die Überlagerung eines mittleren konstanten Flusses und eines von der Richtung des äußeren Flußgradienten abhängigen Kosinusbeitrages. Als Folge der Kontinuität des Neutronenflusses an der Grenzfläche zwischen Stab und Moderator werden in dem Halbzylinder, der dem

größeren Neutronenfluß zugewendet ist, mehr Absorptionen auftreten, und damit auch mehr neue Spaltprozesse eingeleitet werden. Man ist daher versucht, den Einfluß des Brennstoffstabes auf den thermischen Neutronenfluß und die Verteilung abgebremster Neutronen in seiner Umgebung nicht nur durch eine zylindersymmetrische Liniensenke für thermische Neutronen und eine ebensolche Quelle für schnelle Neutronen zu berücksichtigen, sondern zusätzlich Dipollinien einzuführen, deren Stärke vom Dipolmoment der Absorptionen und Spaltungen in Bezug auf eine Ebene senkrecht zum äußeren Flußgradienten abhängt.

Wir erhalten die Form der Dipolsingularitäten, wenn wir den Abstand einer zylindersymmetrischen Liniensenke von einer ebensolchen und gleich starken Quelle gegen Null gehen lassen und gleichzeitig die Stärken von Quelle und Senke so vergrößern, daß das Produkt aus Stärke und Abstand, also das Dipolmoment, endlich bleibt. Die Dipolsingularität, die den Einfluß ungleichförmiger Absorption im Brennstoffstab berücksichtigt wird

$$\vec{f}(\vec{\varrho}) = \frac{\vec{\varrho}}{|\vec{\varrho}|} \frac{K_1(|\vec{\varrho}|/L)}{2\pi L^3 \Sigma_c} \quad (14)$$

wo K_1 die modifizierte Besselfunktion zweiter Art und erster Ordnung ist, und die Dipolsingularität, die den Einfluß ungleichmäßig verteilter Spaltungen auf den Neutronenfluß im umgebenden Medium angibt, wird nach Faltung mit dem üblichen Diffusionskern

$$F(\vec{\varrho}) = \frac{1}{2\pi L^2 \Sigma_c} \cdot \frac{p(\tau)}{8\pi \tau^2} \int_{\text{gesamtes Moderatorvolumen}} \vec{\varrho}' e^{-\frac{|\vec{\varrho}'|^2}{4\tau}} \cdot K_0\left(\frac{|\vec{\varrho} - \vec{\varrho}'|}{L}\right) d_2 \vec{\varrho}'. \quad (15)$$

Obwohl die Werte für die Senkenstärken und Dipolstärken der verschiedenen Stäbe noch unbestimmt gelassen sind, können wir doch schon einen allgemeinen Ausdruck für den thermischen Neutronenfluß im Moderator anschreiben:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{\varrho}) &= \sum_{k=1}^N i_k \{ \eta_k F(|\vec{\varrho} - \vec{\varrho}_k|) - f(|\vec{\varrho} - \vec{\varrho}_k|) \} + \\ &\quad + \sum_{k=1}^N i'_k \{ \eta_k \vec{F}(\vec{\varrho} - \vec{\varrho}_k) - \vec{f}(\vec{\varrho} - \vec{\varrho}_k) \}. \end{aligned} \quad (16)$$

Um die Stärken der Senken i_k zu bestimmen, haben wir die Randbedingung anzuwenden, daß der mittlere thermische Neutronenfluß an der Oberfläche eines Stabes proportional ist zur gesamten Absorption im Stab

$$i_n = \frac{1}{\gamma_n} \cdot \frac{1}{2\pi} \int \phi(\vec{S}_n) d\Omega_n. \quad (17)$$

γ_n ist ein Proportionalitätsfaktor, der von den Absorptionseigenschaften des Stabes n abhängt. Wenn der Neutronenfluß um die Achse des Stabes zylindersymmetrisch ist, deckt sich diese Definition mit der im Abschnitt II gegebenen. Aber auch wenn eine Winkelabhängigkeit der Flußverteilung vorliegt, wird das Resultat für γ_n gleich ausfallen, da Kosinus- und höhere harmonische Beiträge keinen Beitrag zum angeschriebenen Integral geben. Die Dipolstärke wird dagegen proportional der Stärke des Abfalles des Neutronenfluxes in der Nähe des Stabes sein. Als geeignetes Maß für dieses Abfallen nehmen wir den Mittelwert des Flußgradienten entlang der Oberfläche des Stabes, also den Mittelwert des Winkelteiles des Gradienten:

$$\vec{i}_n = \frac{1}{\beta_n} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{R_n=\text{const}} \vec{\text{grad}} \phi(\vec{S}_n) d\Omega_n \quad (18)$$

Die Beiträge zum Integral sind Vektoren, die alle tangential zur Staboberfläche gerichtet sind, ihre Resultierende fällt aber in die Richtung des äußeren Flußgradienten. Es ist nun möglich, das System homogener linearer Gleichungen für die i_n und \vec{i}_n anzuschreiben. Da wir es mit einem zweidimensionalen Problem zu tun haben, ist die Anzahl der Unbekannten gleich $3N$ im allgemeinsten Fall, da die Vektoren \vec{i}_n je zwei Komponenten haben. Symmetrien in der Anordnung setzen diese Zahl stark herab. Die Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned} i_n \gamma_n = & \sum_{k=1}^N i_k \left\{ \eta_k \cdot \frac{1}{2\pi} \int F(|\vec{S}_n - \vec{\varrho}_k|) d\Omega_n - \frac{1}{2\pi} \int f(|\vec{S}_n - \vec{\varrho}_k|) d\Omega_n \right\} + \\ & + \sum_{k=1}^N \vec{i}_k \left\{ \eta_k \cdot \frac{1}{2\pi} \int \vec{F}(\vec{S}_n - \vec{\varrho}_k) d\Omega_n - \frac{1}{2\pi} \int \vec{f}(\vec{S}_n - \vec{\varrho}_k) d\Omega_n \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \vec{i}_n \beta_n = & \sum_{k=1}^N i_k \left\{ \eta_k \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{R_n=\text{const}} \vec{\text{grad}} F(|\vec{S}_n - \vec{\varrho}_k|) d\Omega_n - \frac{1}{2\pi} \int_{R_n=\text{const}} \vec{\text{grad}} f(|\vec{S}_n - \vec{\varrho}_k|) d\Omega_n \right\} \\ & + \sum_{k=1}^N \vec{i}_k \left\{ \eta_k \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{R_n=\text{const}} \vec{\text{grad}} \vec{F}(\vec{S}_n - \vec{\varrho}_k) d\Omega_n - \frac{1}{2\pi} \int_{R_n=\text{const}} \vec{\text{grad}} \vec{f}(\vec{S}_n - \vec{\varrho}_k) d\Omega_n \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

⋮

„grad“ bedeutet den gewöhnlichen, „grad“ den Vektorgradienten.

Wie im vorigen Abschnitt stellt die Lösbarkeitsbedingung dieses Gleichungssystems die kritische Bedingung für die Spaltstoff-Moderator-Anordnung dar.

Die Bestimmung der „Durchlässigkeit konstanten“ γ_n und β_n soll mittels transporttheoretischer Berechnungen oder unter Zuhilfenahme eines Experimentes geschehen. Einen Anhaltspunkt für die Größenordnung dieser Konstanten kann man auch mit der einfachen Diffusions-

theorie gewinnen. Nach dieser ist die allgemeine Lösung für den Neutronenfluß im Stab bis auf Größen zweiter Ordnung:

$$\phi_{\text{Stab}}(\vec{\varrho}) = A_0 I_0(\kappa \varrho) + A_1 I_1(\kappa \varrho) \cos \Omega \quad (21)$$

$I_0(\kappa \varrho)$ und $I_1(\kappa \varrho)$ sind modifizierte Besselfunktionen erster Art.

Der Winkel soll von der Richtung des äußeren Flußgradienten aus gezählt werden, sodaß es nicht notwendig ist, Terme mit $\sin \Omega$ zu berücksichtigen.

Um die Wirkungen der Absorptionen im Stab auf das Neutronenfeld durch eine Liniensenke und eine Dipollinie zu beschreiben, berechnen wir die Zahl der Absorptionen pro Sekunde ($= i$) und das Dipolmoment der Absorptionen pro Sekunde ($= \vec{i}$)

$$\begin{aligned} i &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \phi(\vec{\varrho}) \cdot \Sigma_a d_2 \vec{\varrho} = A_0 \Sigma_a \int_0^{2\pi} \int_0^R I_0(\kappa \varrho) \varrho d\varrho d\Omega = A_0 \frac{2\pi \Sigma_a}{\kappa} R I_1(\kappa R) \\ \vec{i} &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \phi(\vec{\varrho}) \cdot \varrho \cos \Omega \cdot \Sigma_a d_2 \vec{\varrho} = A_1 \pi \Sigma_a \int_0^R I_1(\kappa \varrho) \varrho^2 d\varrho = \\ &= \frac{A_1 \pi \Sigma_a}{\kappa^3} \int_0^{\kappa R} I_1(u) \cdot u^2 du = A_1 \frac{\pi \Sigma_a}{\kappa} R^2 I_2(\kappa R). \end{aligned} \quad (22)$$

Wir vergleichen nun mit der Flußverteilung an der Staboberfläche, die nach (21) die Form

$$\phi(R) = A_0 I_0(\kappa R) + A_1 I_1(\kappa R) \cos \Omega \quad (23)$$

hat, unter Verwendung der Definitionsformeln für die Durchlässigkeitskoeffizienten (17), (18)

$$i = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(R) d\Omega \quad \vec{i} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underset{R=\text{const}}{\vec{\text{grad}}} \phi(R) d\Omega.$$

Dies führt zu

$$\gamma = \frac{\kappa}{2\pi \Sigma_a R} \frac{I_0(\kappa R)}{I_1(\kappa R)}, \quad (24)$$

$$\beta = \frac{\kappa}{2\pi \Sigma_a R^3} \frac{I_1(\kappa R)}{I_2(\kappa R)}. \quad (25)$$

Es sei nochmals betont, daß diese aus der Diffusionstheorie gewonnenen Werte erheblich von den experimentell gewonnenen abweichen können. Nach der Diffusionstheorie kann ferner ein Wert für β angenommen werden, wenn der Wert für γ anderweitig bekannt ist:

$$\beta = \frac{\gamma}{R^2} \frac{\{I_1(\kappa R)\}^2}{I_0(\kappa R) I_2(\kappa R)}. \quad (26)$$

Das Gleichungssystem für die Senkenstärken und Dipolstärken kann nun in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} (\eta_k M_{kn}^0 - N_{kn}^0 - \gamma_n \delta_{nk}), & (\eta_k \vec{M}_{kn}^1 - \vec{N}_{kn}^1) \\ (\eta_k \vec{M}'_0 - \vec{N}'_0), & (\eta_k \vec{\vec{M}}_{kn}^1 - \vec{\vec{N}}_{kn}^1 - \beta_n \delta_{nk}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (i_k) \\ (\vec{i}_k) \end{pmatrix} = 0 \quad (27)$$

Dabei sind die M und N Untermatrizen, welche die verschiedenen Wechselwirkungsintegrale als Elemente enthalten. M sind Terme, die Singularitäten für schnelle Neutronen entsprechen, N dagegen beziehen sich auf Singularitäten für langsame Neutronen. 0 als Superskript bedeutet Beiträge von zylindersymmetrischen Singularitäten, während 1 Beiträge von Dipollinien angibt. Ein Apostroph deutet an, daß eine Integration über einen Gradienten entlang der Staboberfläche in den betreffenden Integralen vorliegt. Terme mit \rightarrow haben Vektorcharakter. Terme mit $\vec{\cdot}$ sind Tensoren.

Wir besprechen die Integrale nun im einzelnen:

$$N_{kn}^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(|\vec{S}_n - \vec{\varrho}_k|) d\Omega_n \quad (28)$$

gibt die mittlere Flußdepression an der Oberfläche des Stabes n , die durch eine zylindersymmetrische Liniensenke der Stärke 1 an der Stelle des Stabes k hervorgerufen wird. Wenn $n = k$, dann gibt das Integral die Abnahme des Flusses an der Oberfläche, die durch eine entsprechende Senke im Mittelpunkt desselben Stabes hervorgerufen wird.

$$M_{kn}^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(|\vec{S}_n - \vec{\varrho}_k|) d\Omega_n. \quad (29)$$

Diese Integrale geben die mittlere Flußerhöhung an der Oberfläche des Stabes n zufolge einer normierten Linienquelle schneller Neutronen am Ort des Mittelpunktes von Stab k an. Wenn $n = k$, so gibt das Integral die Erhöhung des thermischen Flusses zufolge einer normierten Quelle schneller Neutronen im selben Stab. Es ist allerdings hier vorausgesetzt, daß im Stab selbst die Neutronen nicht abgebremst werden, sondern nur im umgebenden Moderator.

$$\vec{N}_{kn}^1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{f}(\vec{S}_n - \vec{\varrho}_k) d\Omega_n \quad (30)$$

gibt die mittlere Flußerhöhung oder -senkung an der Oberfläche des Stabes n zufolge einer Dipollinie des Betrages 1 für thermische Neutronen im Stab k . Terme mit $n = k$ verschwinden, wie leicht begründet werden kann.

$$\vec{M}_{kn}^1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{S}_n - \vec{\varrho}_k) d\Omega_n. \quad (31)$$

Diese Integrale geben den mittleren Einfluß einer normierten Dipollinie für schnelle Neutronen im Stab k auf den thermischen Neutronenfluß an der Oberfläche des Stabes n . Wenn $n = k$ gilt, dann sind auch sie null.

$$\vec{N}'_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{\text{grad}} f(|\vec{S}_n - \vec{\varrho}_k|) d\Omega_n. \quad (32)$$

Diese Integrale geben die Kosinusverteilung des Neutronenflusses an der Oberfläche des Stabes n zufolge einer Liniensenke für thermische Neutronen im Stab k . Für $n = k$ sind diese Integrale null.

$$\vec{M}'_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{\text{grad}} F(|\vec{S}_n - \vec{\varrho}_k|) d\Omega_n. \quad (33)$$

Diese Integrale geben die Kosinusverteilung des Neutronenflusses an der Oberfläche des Stabes n zufolge einer Linienquelle für schnelle Neutronen im Stab k . Auch hier sind Beiträge mit $n = k$ null. Die beiden letzten Integraltypen

$$\vec{N}'_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{\text{grad}} \vec{f}(\vec{S}_n - \vec{\varrho}_k) d\Omega_n \quad (34)$$

und

$$\vec{M}'_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{\text{grad}} \vec{F}(\vec{S}_n - \vec{\varrho}_k) d\Omega_n \quad (35)$$

bedeuten die Beiträge zur Kosinusverteilung des Neutronenflusses an der Oberfläche des Stabes n zufolge von Dipollinien für thermische und schnelle Neutronen im Stab k . Ihre Beiträge werden in den meisten Fällen zu vernachlässigen sein. Wenn n gleich k ist, geben sie die Rückeinflüsse der Dipolsingularitäten im Innern eines Stabes auf die Winkelabhängigkeit des Neutronenflusses an dessen Oberfläche.

IV. Die Berechnung der Wechselwirkungsintegrale

Obwohl sich die oben angegebene Verfahrensweise noch verallgemeinern läßt und die rechnerische Erfassung der Wechselwirkungen dann übersichtlicher wird, wollen wir zeigen, daß die am Schluß des vorigen Abschnittes definierten Integrale ohne allzugroße Mühe auswerten lassen.

Bei Annahme der Gültigkeit der FERMI-Age-Theorie für die Neutronenverlangsamung und der monoenergetischen Diffusionstheorie für die darauf folgende Ausbreitung der Neutronen bei thermischen

Energien haben die Integranden folgende Form: (vgl. (4), (6), (7), (14), (15)).

$$\begin{aligned} f(|\vec{\varrho}|) &= \frac{1}{2\pi L^2 \Sigma_c} K_0\left(\frac{|\vec{\varrho}|}{L}\right); & \vec{f}(\vec{\varrho}) &= \frac{1}{2\pi L^3 \Sigma_c} \frac{\vec{\varrho}}{|\vec{\varrho}|} K_1\left(\frac{|\vec{\varrho}|}{L}\right) \\ F(|\vec{\varrho}|) &= \frac{1}{2\pi L^2 \Sigma_c} \cdot \frac{1}{4\pi\tau} \int e^{-\frac{|\vec{\varrho}|^2}{4\tau}} \cdot K_0\left(\frac{|\vec{\varrho}| - |\vec{\varrho}'|}{L}\right) d^2\vec{\varrho}' \\ \vec{F}(\vec{\varrho}) &= \frac{1}{2\pi L^2 \Sigma_c} \frac{1}{8\pi\tau^2} \int \vec{\varrho}' e^{-\frac{|\vec{\varrho}|^2}{4\tau}} K_0\left(\frac{|\vec{\varrho} - \vec{\varrho}'|}{L}\right) d^2\vec{\varrho}'. \end{aligned}$$

Dabei haben wir $\phi(\tau) = 1$ gesetzt, also angenommen, daß das Medium keine Neutronen höherer als thermischer Energie absorbiert. Diese Einschränkung wäre jedoch nicht notwendig. Es würden sich einfach alle Integrale M mit dem Faktor $\phi(\tau)$ multiplizieren.

Wir berechnen zunächst die den Absorptionswirkungen entsprechenden Integrale:

1.

$$\begin{aligned} N_{kn}^0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(|\vec{S}_n - \vec{\varrho}_k|) d\Omega_n = \frac{1}{2\pi L^2 \Sigma_c} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_0\left(\frac{|\vec{S}_n - \vec{\varrho}_k|}{L}\right) d\Omega_n = \\ &= \frac{1}{2\pi L^2 \Sigma_c} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_0\left(\frac{|\vec{R}_n + \vec{d}_{nk}|}{L}\right) d\Omega_n = \frac{1}{2\pi L^2 \Sigma_c} K_0\left(\frac{d_{nk}}{L}\right) I_0\left(\frac{R_n}{L}\right). \end{aligned} \quad (36)$$

Hiebei wurde ein Additionstheorem für die modifizierten Bessel-funktionen verwendet:

$$K_0\left(\frac{|\vec{R}_n + \vec{d}_{nk}|}{L}\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} K_m\left(\frac{d_{nk}}{L}\right) I_m\left(\frac{R_n}{L}\right) \cos(m\Omega_n).$$

Für den Einfluß eines Stabes auf den mittleren Neutronenfluß an seiner eigenen Oberfläche erhalten wir einfach

$$N_{kk}^0 = \frac{1}{2\pi L^2 \Sigma_c} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_0\left(\frac{|\vec{R}_k|}{L}\right) d\Omega_k = \frac{1}{2\pi L^2 \Sigma_c} K_0\left(\frac{R_k}{L}\right). \quad (37)$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \vec{N}_{kn}^1 &= \frac{1}{2\pi L^3 \Sigma_c} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\vec{R}_n + \vec{d}_{nk})}{|\vec{R}_n + \vec{d}_{nk}|} K_1\left(\frac{|\vec{R}_n + \vec{d}_{nk}|}{L}\right) d\Omega_n = \\ &= \frac{\vec{d}_{nk}}{d_{nk}} \left(\frac{\vec{d}_{nk} \cdot \vec{N}_{kn}^1}{d_{nk}} \right) + \frac{\vec{u}_{nk}}{u_{nk}} \left(\frac{\vec{u}_{nk} \cdot \vec{N}_{kn}^1}{u_{nk}} \right) \quad \vec{u}_{nk} \perp \vec{d}_{nk}. \end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst die Komponente $\|\vec{d}_{nk}\| \vec{N}_{kn}^1$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\vec{d}_{nk}}{\vec{d}_{nk}} \vec{N}_{kn}^1 \right) &= \frac{1}{2\pi L^3 \sum_c} \frac{1}{2\pi} \int K_1 \left(\frac{|\vec{R}_n + \vec{d}_{nk}|}{L} \right) \cos \varphi \cdot d\Omega_n = \\ &= \frac{1}{2\pi L^3 \sum_c} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} K_{1+m} \left(\frac{d_{nk}}{L} \right) I_m \left(\frac{R_n}{L} \right) \cos(m\Omega_n) d\Omega_n = \\ &= \frac{1}{2\pi L^3 \sum_c} \cdot K_1 \left(\frac{d_{nk}}{L} \right) I_0 \left(\frac{R_n}{L} \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Senkrecht zu \vec{d}_{nk} mitteln sich die Beiträge zum Integral heraus. Es sei \vec{u}_{nk} ein Einheitsvektor $\perp \vec{d}_{nk}$, so daß $(\vec{u}_{nk} \vec{d}_{nk}) = 0$. Wir erhalten

$$(\vec{u}_{nk} \vec{N}_{kn}^1) = \frac{1}{2\pi L^3 \sum_c} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_n (-\sin \Omega_n) \frac{K_1 \left(\frac{|\vec{R}_n + \vec{d}_{nk}|}{L} \right)}{|\vec{R}_n + \vec{d}_{nk}|} d\Omega_n = 0.$$

Da sowohl $K_1(|\vec{R}_n + \vec{d}_{nk}|/L)$ als auch $|\vec{R}_n + \vec{d}_{nk}|$ nur gerade Funktionen in den Winkeln enthalten, ist der gesamte Integrand ungerade in den Winkeln und das Integral verschwindet. Damit wird

$$\vec{N}_{kn}^1 = \frac{\vec{d}_{nk}}{2\pi L^3 \sum_c d_{nk}} K_1 \left(\frac{d_{nk}}{L} \right) I_0 \left(\frac{R_n}{L} \right). \quad (39)$$

Es ist leicht zu beweisen, daß $\vec{N}_{kk}^1 = 0$:

$$\vec{N}_{kk}^1 = \frac{1}{2\pi L^3 \sum_c} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\vec{R}_k}{R_k} \cdot K_1 \left(\frac{R_k}{L} \right) d\Omega_k = \frac{K_1 \left(\frac{R_k}{L} \right)}{(2\pi)^2 L^3 \sum_c R_k} \int_0^{2\pi} \vec{R}_k d\Omega_k = 0, \quad (40)$$

da

$$\int_0^{2\pi} \cos \Omega_k d\Omega_k = \int_0^{2\pi} \sin \Omega_k d\Omega_k = 0.$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \vec{N}'_0 &= \frac{1}{2\pi L^2 \sum_c} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{\text{grad}}_{\vec{R}_n = \text{const}} K_0 \left(\frac{|\vec{R}_n + \vec{d}_{nk}|}{L} \right) d\Omega_n \\ \frac{(\vec{d}_{nk} \vec{N}'_0)}{\vec{d}_{nk}} &= \frac{1}{2\pi L^2 \sum_c} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R_n} \int_0^{2\pi} (-\sin \Omega_n) \frac{d}{d\Omega_n} \\ &\quad \cdot \left\{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} K_m \left(\frac{d_{nk}}{L} \right) I_m \left(\frac{R_n}{L} \right) \cos m(\pi - \Omega_n) \right\} d\Omega_n \\ &= -\frac{1}{2\pi L^2 \sum_c} \frac{1}{R_n} K_1 \left(\frac{d_{nk}}{L} \right) I_1 \left(\frac{R_n}{L} \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Die Komponente des Integrals senkrecht zu \vec{d}_{nk} ist wieder null wegen der Orthogonalität der Winkelfunktionen.

$$\vec{N}'_0 = -\frac{\vec{d}_{nk}}{2\pi L^3 \Sigma_c d_{nk}} \cdot K_1\left(\frac{d_{nk}}{L}\right) \frac{I_1\left(\frac{R_n}{L}\right)}{\frac{R_n}{L}} \quad (42)$$

Da $\partial/\partial \Omega_k \{K_0(R_n/L)\} \equiv 0$ ist, folgt daß \vec{N}'_0 verschwindet.

4. Durch Berechnung der einzelnen Komponenten kann auch das tensorielle Integral

$$\vec{N}'_1 = \frac{1}{2\pi L^3 \Sigma_c} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underset{R_n = \text{const}}{\text{grad}} \frac{(\vec{R}_n + \vec{d}_{nk})}{|\vec{R}_n + \vec{d}_{nk}|} K_1\left(\frac{|\vec{R}_n + \vec{d}_{nk}|}{L}\right) d\Omega_n$$

ausgewertet werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \left(\frac{\vec{d}_{nk}}{d_{nk}} \vec{N}'_1 \frac{\vec{d}_{nk}}{d_{nk}} \right) &= \frac{1}{4\pi L^4 \Sigma_c} \left\{ K_0\left(\frac{d_{nk}}{L}\right) - K_2\left(\frac{d_{nk}}{L}\right) \right\} \cdot \frac{I_1\left(\frac{R_n}{L}\right)}{\frac{R_n}{L}} \\ \left(\vec{u}_{nk} \vec{N}'_1 \frac{\vec{d}_{nk}}{d_{nk}} \right) &= \left(\frac{\vec{d}_{nk}}{d_{nk}} \vec{N}'_1 \vec{u}_{nk} \right) = 0 \\ \left(\vec{u}_{nk} \vec{N}'_1 \vec{u}_{nk} \right) &= \frac{1}{4\pi L^4 \Sigma_c} \left\{ K_2\left(\frac{d_{nk}}{L}\right) - K_0\left(\frac{d_{nk}}{L}\right) \right\} \cdot \frac{I_1\left(\frac{R_n}{L}\right)}{\frac{R_n}{L}} \\ \vec{N}'_1 &= \left\{ \frac{\vec{d}_{nk} \vec{d}_{nk}}{d_{nk}^2} - \vec{u}_{nk} \vec{u}_{nk} \right\} \frac{K_0\left(\frac{d_{nk}}{L}\right) - K_2\left(\frac{d_{nk}}{L}\right)}{4\pi L^4 \Sigma_c} \cdot \frac{I_1\left(\frac{R_n}{L}\right)}{\frac{R_n}{L}}. \quad (43) \end{aligned}$$

Im Falle $n = k$ wird

$$\vec{N}'_1 = \frac{1}{2\pi L^3 \Sigma_c} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underset{R_n = \text{const}}{\text{grad}} \frac{\vec{R}_k}{R_k} K_1\left(\frac{R_k}{L}\right) d\Omega_k.$$

Es zeigt sich daß der Tensor zu einem Skalar entartet. Bezeichnet man mit \vec{d} und \vec{u} zwei beliebige, aufeinander senkrecht stehende Einheitsvektoren, so läßt sich leicht zeigen, daß die Komponenten des Integrals \vec{N}'_1 in Bezug auf diese Richtungen durch

$$\begin{aligned} (\vec{d} \vec{N}'_k \vec{d}) &= (\vec{u} \vec{N}'_k \vec{u}) = \frac{1}{4\pi L^4 \Sigma_c} \frac{K_1\left(\frac{R_k}{L}\right)}{\frac{R_k}{L}} \\ (\vec{d} \vec{N}'_k \vec{u}) &= (\vec{u} \vec{N}'_k \vec{d}) = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

gegeben sind.

Die auf Neutronenproduktion in den einzelnen Brennstoffelementen zurückgehenden Wechselwirkungsintegrale sind wesentlich schwerer auszuwerten, da bei ihnen der Integrand durch eine Faltungsoperation gebildet wird. Es gelingt jedoch, die Integrationen auf eine einfache, numerisch auszuführende Quadratur zurückzuführen.

5.

$$\begin{aligned} M_{kn}^0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\vec{S}_n - \vec{\varrho}_k) d\Omega_n = \\ &= \frac{1}{2\pi L^2 \Sigma_c} \cdot \frac{1}{4\pi\tau} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int \int e^{-\frac{|\vec{\varrho}|^2}{4\tau}} \cdot K_0\left(\frac{|\vec{S}_n - \vec{\varrho}_k - \vec{\varrho}'|}{L}\right) d^2 \vec{\varrho}' d\Omega_n \\ &= \frac{1}{2\pi L^2 \Sigma_c} \cdot \frac{1}{4\pi\tau} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int \int \int e^{-\frac{|\vec{\varrho}|^2}{4\tau}} \cdot K_0\left(\frac{|\vec{R}_n + \vec{d}_{nk} - \vec{\varrho}'|}{L}\right) d^2 \vec{\varrho}' d\Omega_n \\ &= \frac{1}{2\pi L^2 \Sigma_c} \cdot \frac{1}{4\pi\tau} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int \int \int e^{-\frac{|\vec{y} - \vec{d}_{nk}|^2}{4\tau}} \cdot K_0\left(\frac{|\vec{R}_n + \vec{y}|}{L}\right) d^2 \vec{y} d\Omega_n. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, daß die Neutronen nur außerhalb des Brennstoffstabes moderiert werden und daß hiebei trotz der Anwesenheit des Stabes die Ausbreitungsfunktionen für ein unendliches Medium den Vorgang richtig charakterisieren (was nur für ein relativ hohes Verhältnis von Moderatorvolumen zu Brennstoffvolumen der Fall sein wird), erhalten wir

$$M_{kn}^0 = \frac{1}{2\pi L^2 \Sigma_c} \cdot \frac{1}{4\pi\tau} \int_0^{2\pi} \int_{R_n}^{\infty} e^{-\frac{|\vec{y} - \vec{d}_{nk}|^2}{4\tau}} \cdot K_0\left(\frac{y}{L}\right) \cdot I_0\left(\frac{R_n}{L}\right) y dy d\varphi$$

wobei wieder das Additionstheorem für Besselfunktionen verwendet wurde.

Eine Integraldarstellung für die modifizierte Besselfunktion $I_0(z)$ lautet:

$$I_0(z) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} e^{\pm z \cos \varphi} d\varphi.$$

Deshalb wird

$$M_{kn}^0 = \frac{e^{-d_{nk}^2/4\tau} \cdot I_0(R_n/L)}{L^2 \Sigma_c \cdot 4\pi\tau} \int_{R_n}^{\infty} I_0\left(\frac{y \cdot d_{nk}}{2\tau}\right) K_0\left(\frac{y}{L}\right) e^{-y^2/4\tau} y dy. \quad (45)$$

Für $n = k$ erhalten wir

$$\begin{aligned} M_{kk}^0 &= \frac{1}{2\pi L^2 \Sigma_c} \cdot \frac{1}{4\pi\tau} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \int \int e^{-\frac{\varrho'^2}{4\tau}} \cdot K_0\left(\frac{\vec{R}_k - \vec{\varrho}'}{L}\right) d^2 \vec{\varrho}' d\Omega_k = \\ &= \frac{1}{2\pi L^2 \Sigma_c} \cdot \frac{1}{4\pi\tau} \cdot \int \int e^{-\frac{\varrho'^2}{4\tau}} \cdot K_0\left(\frac{\varrho'}{L}\right) \cdot I_0\left(\frac{R_k}{L}\right) d^2 \vec{\varrho}' = \\ &= \frac{1}{L^2 \Sigma_c} \cdot \frac{1}{4\pi\tau} \cdot I_0\left(\frac{R_k}{L}\right) \int_{R_k}^{\infty} e^{-\frac{\varrho'^2}{4\tau}} \cdot K_0\left(\frac{\varrho'}{L}\right) \cdot \varrho' d\varrho' \end{aligned} \quad (46)$$

wie auch direkt durch Einsetzen von $\vec{d}_{nk} = 0$ im allgemeinen Resultat für M_{kn}^0 gezeigt werden kann.

6. Die Integrale

$$\vec{M}_{kn}^1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{S}_n - \vec{\varrho}_k) d\Omega_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{d}_{nk} + \vec{R}_n) d\Omega_n.$$

liefern nur Beiträge in der Richtung \vec{d}_{nk} : $(\vec{u}_{nk} \vec{M}_{kn}^1) = 0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\vec{d}_{nk}}{d_{nk}} \cdot \vec{M}_{kn}^1 \right) &= \frac{1}{2\pi L^2 \Sigma_c} \cdot \frac{1}{8\pi\tau^2} \int_0^{2\pi} \int_{R_n}^{\infty} \left(\frac{\vec{d}_{nk} \cdot \vec{\varrho}'}{d_{nk}} \right) e^{-\frac{\varrho'^2}{4\tau}} \cdot \\ &\quad \cdot K_0\left(\frac{\vec{d}_{nk} - \vec{\varrho}'}{L}\right) I_0\left(\frac{R_n}{L}\right) d^2 \vec{\varrho}' = \\ &= \frac{1}{2\pi L^2 \Sigma_c} \cdot \frac{1}{8\pi\tau^2} \left\{ + d_{nk} \int_0^{2\pi} \int_{R_n}^{\infty} e^{-\frac{|\vec{d}_{nk} - \vec{y}|^2}{4\tau}} \cdot K_0\left(\frac{y}{L}\right) I_0\left(\frac{R_n}{L}\right) d^2 \vec{y} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{2\pi} \int_{R_n}^{\infty} \left(\frac{\vec{d}_{nk} \cdot \vec{y}}{d_{nk}} \right) e^{-\frac{|\vec{d}_{nk} - \vec{y}|^2}{4\tau}} \cdot K_0\left(\frac{y}{L}\right) I_0\left(\frac{R_n}{L}\right) d^2 \vec{y} \right\} = \\ &= \frac{d_{nk}}{2\tau} M_{kn}^0 - \frac{I_0(R_n/L)}{2\pi L^2 \Sigma_c \cdot 8\pi\tau^2} \int_0^{2\pi} \int_{R_n}^{\infty} e^{\frac{d_{nk}y}{2\tau} \cos\varphi - \frac{y^2}{4\tau}} \cdot \\ &\quad \cdot \cos\varphi \cdot K_0\left(\frac{y}{L}\right) y^2 dy d\varphi. \end{aligned}$$

Da

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{z \cos \varphi} \cos \varphi d\varphi$$

eine Integraldarstellung für die modifizierte Besselfunktion $I_1(z)$ ist, folgt

$$\left(\frac{\vec{d}_{nk}}{d_{nk}} \vec{M}_{kn}^1 \right) = \frac{d_{nk}}{2\tau} M_{kn}^0 - \frac{I_0(R_n/L)}{L^2 \Sigma_c \cdot 8\pi \tau^2} e^{-d_{nk}^2/4\tau} \int_{R_n}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4\tau}} \cdot I_1\left(\frac{d_{nk}}{2\tau} y\right) K_0\left(\frac{y}{L}\right) y^2 dy \quad (47)$$

\vec{M}_{kk}^1 verschwindet wieder wegen der Orthogonalität der Winkel-funktionen.

7. In analoger Weise zeigt man

$$\left(\frac{\vec{d}_{nk}}{d_{nk}} \vec{M}_{kn}'^0 \right) = - \frac{e^{-d_{nk}^2/4\tau} \cdot I_1(R_n/L)}{L^2 \Sigma_c \cdot 4\pi \tau \cdot R_n} \int_{R_n}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4\tau}} \cdot I_1\left(\frac{d_{nk}}{2\tau} y\right) K_1\left(\frac{y}{L}\right) y dy \quad (48)$$

$$(\vec{u}_{nk} \vec{M}_{kn}'^0) = 0 \quad \text{und} \quad \vec{M}_{kk}'^0 = 0$$

8. Für die Komponenten des tensoriellen Integrals finden wir

$$\begin{aligned} \left(\vec{M}_{kn}'^1 \frac{\vec{d}_{nk}}{d_{nk}} \right) &= \frac{d_{nk}}{2\tau} \left(\vec{M}_{kn}'^0 \frac{\vec{d}_{nk}}{d_{nk}} \right) - \\ &- \left\{ \frac{e^{-d_{nk}^2/4\tau} \cdot I_1(R_n/L)}{2 L^2 \Sigma_c \cdot 8\pi \tau^2 R_n} \int_{R_n}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4\tau}} \left\{ I_0\left(\frac{d_{nk}}{2\tau} y\right) + I_2\left(\frac{d_{nk}}{2\tau} y\right) \right\} K_1\left(\frac{y}{L}\right) y^2 dy \right\} \\ \vec{M}_{kn}'^1 \vec{u}_{nk}) &= 0 + \\ &+ \{ \dots \} \\ \vec{M}_{kn}'^1 \frac{\vec{d}_{nk}}{d_{nk}} \right) &= \left(\vec{d}_{nk} \vec{M}_{kn}'^1 \vec{u}_{nk} \right) = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

Für $n = k$ wird das Integral ähnlich wie $N_{kk}'^1$ ein Skalar:

$$\vec{M}_{kk}'^1 \equiv M_{kk}'^1 - \frac{I_1(R_k/L)}{2 L^2 \Sigma_c \cdot 8\pi \tau^2 \cdot R_k} \int_{R_k}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4\tau}} K_1\left(\frac{y}{L}\right) y^2 dy. \quad (50)$$

Damit sind alle Wechselwirkungsintegrale behandelt, soweit dies in allgemeiner Form möglich ist. Führen wir noch die dimensionslosen Parameter

$$\frac{L^2}{4\tau} = \alpha^2, \quad L \Sigma_c = \sigma_c, \quad \frac{\vec{d}_{nk}}{L} = \vec{\beta}_{nk}, \quad \frac{R_n}{L} = \varrho_n, \quad \frac{\vec{u}_{nk}}{L} = \vec{\omega}_{nk} \quad (51)$$

ein, so schreiben sich die Ergebnisse:

$$\begin{aligned}
 N_{kn}^0 &= \frac{1}{2\pi L \sigma_c} \cdot K_0(\beta_{nk}) I_0(\varrho_n); & N_{kk}^0 &= \frac{1}{2\pi L \sigma_c} K_0(\varrho_k) \\
 \vec{N}_{kn}^1 &= \frac{\vec{\beta}_{nk}}{\beta_{nk}} \cdot \frac{1}{2\pi L^2 \sigma_c} K_1(\beta_{nk}) I_0(\varrho_n); & \vec{N}_{kk}^1 &= 0 \\
 \vec{N}'_n^0 &= -\frac{\vec{\beta}_{nk}}{\beta_{nk}} \cdot \frac{1}{2\pi L^2 \sigma_c} K_1(\beta_{nk}) \frac{I_1(\varrho_n)}{\varrho_n}; & \vec{N}'_k^0 &= 0 \\
 \vec{N}'_n^1 &= \left\{ \frac{\vec{\beta}_{nk} \vec{\beta}_{nk}}{\beta_{nk}^2} - \frac{\vec{\omega}_{nk} \vec{\omega}_{nk}}{\omega_{nk}^2} \right\} \frac{K_0(\beta_{nk}) - K_2(\beta_{nk})}{4\pi L^3 \sigma_c} \cdot \frac{I_1(\varrho_n)}{\varrho_n}; & \\
 N'_k^1 &= \frac{1}{4\pi L^3 \sigma_c} \frac{K_1(\varrho_k)}{\varrho_k} \\
 M_{kn}^0 &= \frac{\alpha^2}{\pi L \sigma_c} e^{-\alpha^2 \beta_{nk}^2} I_0(\varrho_n) \int_{\varrho_n}^{\infty} I_0(2\alpha^2 \beta_{nk} \varrho) K_0(\varrho) e^{-\alpha^2 \varrho^2} \varrho d\varrho \\
 M_{kk}^0 &= \frac{\alpha^2}{\pi L \sigma_c} \cdot I_0(\varrho_k) \int_{\varrho_k}^{\infty} K_0(\varrho) e^{-\alpha^2 \varrho^2} \varrho d\varrho; & \vec{M}_{kk}^1 &= 0; \quad \vec{M}'_k^0 = 0 \\
 \vec{M}_{kn}^1 &= \frac{2 \vec{\beta}_{nk} \alpha^2}{L} M_{kn}^0 - \frac{\vec{\beta}_{nk}}{\beta_{nk}} \cdot \frac{2 \alpha^4}{\pi L^2 \sigma_c} e^{-\alpha^2 \beta_{nk}^2} I_0(\varrho_n) \cdot \\
 &\quad \cdot \int_{\varrho_n}^{\infty} I_1(2\alpha^2 \beta_{nk} \varrho) K_0(\varrho) e^{-\alpha^2 \varrho^2} \varrho^2 d\varrho; \\
 \vec{M}'_n^0 &= -\frac{\vec{\beta}_{nk}}{\beta_{nk} \pi L^2 \sigma_c} \frac{\alpha^2}{e^{-\alpha^2 \beta_{nk}^2} \frac{I_1(\varrho_n)}{\varrho_n}} \int_{\varrho_n}^{\infty} I_1(2\alpha^2 \beta_{nk} \varrho) K_1(\varrho) e^{-\alpha^2 \varrho^2} \varrho d\varrho \\
 \vec{M}'_n^1 &= \frac{2 \vec{\beta}_{nk} \alpha^2}{L} \vec{M}'_n^0 - \left\{ \frac{\vec{\beta}_{nk} \vec{\beta}_{nk}}{\beta_{nk}^2} - \frac{\vec{\omega}_{nk} \vec{\omega}_{nk}}{\omega_{nk}^2} \right\} \frac{\alpha^4}{\pi L^3 \sigma_c} \cdot \frac{I_1(\varrho_n)}{\varrho_n} \cdot \\
 &\quad \cdot \int_{\varrho_n}^{\infty} \{I_0 + I_2(2\alpha^2 \beta_{nk} \varrho)\} K_1(\varrho) e^{-\alpha^2 \varrho^2} \varrho^2 d\varrho; \\
 \vec{M}'_k^1 &= \frac{\alpha^4}{\pi L^3 \sigma_c} \cdot \frac{I_1(\varrho_k)}{\varrho_k} \int_{\varrho_k}^{\infty} K_1(\varrho) e^{-\alpha^2 \varrho^2} \varrho^2 d\varrho
 \end{aligned}$$

Sämtliche Koeffizienten des Gleichungssystems (27) sind damit bestimmbar. Die vektoriellen und tensoriellen unter ihnen müssen

für eine numerische Berechnung der Determinante des Gleichungssystems in Komponenten hinsichtlich vorgegebener Koordinatenachsen zerlegt werden.

Die kritischen Parameter von Spaltstoffanordnungen, die aus relativ wenigen räumlich klar getrennten Spaltstoffelementen mit hochangereichertem Brennstoff bestehen, sind damit prinzipiell berechenbar. Wegen der großen Zahl der auftretenden Wechselwirkungssterme müßte zur tatsächlichen Auswertung jedoch eine leistungsfähige elektronische Rechenmaschine zur Verfügung stehen.

Die vorliegende Arbeit stellt bis auf einige kleinere Abweichungen den ersten Teil einer im Institut für Theoretische Physik der Universität Graz verfaßten Dissertation dar. Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. PAUL URBAN danke ich für sein stetes Interesse und seinen Rat in zahlreichen Diskussionen, sowie für seine Hilfe bei der Beschaffung von Fachliteratur.

Literatur

1. S. GLASSTONE und M. C. EDLUND, *The elements of nuclear reactor theory*. Van Nostrand, Princeton-New Jersey—New York. 1952. S. 326 u. a.
2. P. F. GAST, Normal Uranium, Graphite-moderated reactors. *Geneva Proc.*, Bd. 5, S. 288, ebenda S. 541.
3. S. M. FEINBERG, Heterogeneous methods for calculating reactors; ebenda S. 484.
4. A. D. GALANIN, Critical size of heterogeneous reactor with small number of rods; ebenda S. 462.
5. A. D. GALANIN, The thermal coefficient in a heterogeneous reactor; ebenda S. 477.
6. G. A. BAT, Calculations for heterogeneous reactors with a small number of blocks; ebenda S. 437.
7. I. I. GUREVICH und I. Y. POMERANOHOUK, The theory of resonance absorption in heterogeneous systems; ebenda S. 466.
8. R. AVERY, Two-group diffusion theory for a ring of cylindrical rods. *RED-TPM-14*. U.S.A.E.C.
9. S. CORNO und Y. YEIVIN, Cylindrical multiplying regions in an infinite reflector. *ISNSE-IV*, Argonne National Laboratory.

Zur Theorie der Néelschen Kette*

Von

E. Ledinegg und P. Urban

Institute für Theoretische Physik der Technischen Hochschule
und der Universität Graz

Mit 2 Abbildungen

(Eingegangen am 21. März 1958)

Zusammenfassung

Auf Grund einer vorausgegangenen Arbeit (Acta Physica Austriaca 8, 167, 1953) wird das magnetische Moment einer linearen Atomkette bei positivem Austauschintegral berechnet. In Erweiterung der genannten Arbeit ist hier eine beliebige Anzahl f nächster Nachbarn vorausgesetzt. Es wird gezeigt, daß der desorientierende Einfluß eines äußeren, antiparallel zur Spinstellung des Grundzustandes gerichteten Magnetfeldes, mit wachsendem f wie $f^{-3/2}$ nach Null geht. Dabei ist angenommen, daß die Austauschintegrale für Nachbaratome den gleichen Wert besitzen, was näherungsweise für nicht zu große f durch eine passende Verknäuelung der Atomkette erreicht werden kann.

§ 1. Einleitung

In einer früheren Arbeit¹ wurde das magnetische Verhalten einer linearen Atomkette am absoluten Nullpunkt untersucht. Unter der Annahme, daß nur jeweils die beiden nächsten Nachbarn eines Atomes in Austauschwechselwirkung treten und $I > 0$ ist, erhalten wir für das magnetische Moment J den folgenden Ausdruck:

$$J = N \mu_B \left(1 - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_B H}{2I}} \right) \quad (1)$$

Das äußere Magnetfeld H ist antiparallel zu den Spinvektoren des Grundzustandes gerichtet. Man erkennt aus Gl. (1), daß der Grundzustand einer stabilen Gleichgewichtslage entspricht, die durch die Austauschwechselwirkung der Gitteratome bestimmt wird. Ein eingebrachtes magnetisches Störfeld ändert den bestehenden ferromagnetischen Grundzustand nur wenig. In diesem Sinne kann die lineare Kette am

* Herrn Professor Dr. VICTOR F. HESS zum 75. Geburtstag gewidmet.

¹ E. LEDINEGG und P. URBAN, Acta Phys. Austr. 8, 167, 1953, wird im folgenden unter [1] zitiert.

absoluten Nullpunkt als „ferromagnetisch“ bezeichnet werden. Die Frage, ob auch bei Bestehen einer von Null verschiedenen Temperatur das magnetische Moment $J = J(H, T)$ durch den Grenzübergang $T \rightarrow 0$ in den Ausdruck Gl. (1) übergeht, ist allerdings im Rahmen dieser Theorie nicht zu beantworten. Es ist jedoch plausibel, daß die desorientierende Wirkung der Wärmebewegung, wenn T sehr klein ist, keinen wesentlich verschiedenen quantitativen Effekt von der desorientierenden Wirkung des antiparallel gerichteten Magnetfeldes hervorruft.

In der vorliegenden Arbeit wird auf Grund der in [1] angewandten Methode, welche auf L. HULTHÉN² zurückgeht, die Anzahl der nächsten Nachbarn beliebig erweitert, wobei zu erwarten ist, daß mit steigendem f ($2f =$ Anzahl der nächsten Nachbarn) das desorientierende Glied beliebig klein wird. Die Durchführung der Rechnung bestätigt diese Erwartung und man erhält anstelle von Gl. (1) die Beziehung

$$\left. \begin{aligned} J &= N \mu_B \left(1 - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_B H}{A_1^{(f)} I}} \right) \\ A_1^{(f)} &= \frac{1}{2} \left\{ (2f+1)f + \binom{2f+1}{3} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

mit

welche im folgenden abgeleitet werden soll.

§ 2. Die Eigenwerte des Wechselwirkungsoperators für die N-gliedrige Kette mit $2f$ nächsten Nachbarn

Die Kette wird durch den HAMILTON-Operator

$$H = I \sum_{k<l}^{(f)} Q_{k,l} - 2 \mu_B \left(\hbar, \sum_k \vec{\sigma}_k \right) \quad (3 \text{ a})$$

mit

$$Q_{k,l} = 1 - P_{k,l}, \quad P_{k,l} = \frac{1}{2} [1 + 4 (\vec{\sigma}_k, \vec{\sigma}_l)] \quad (3 \text{ b})$$

charakterisiert. Dabei ist $\vec{\sigma}_k = \frac{1}{2} (\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ die zum k -ten Atom gehörige PAULISCHE Spinvektormatrix. Sind die Eigenwerte H von (3) samt ihren Multiplizitäten p bekannt, so erhält man das magnetische Moment $J(T)$ aus der Formel:

$$J(T) = k T \frac{\partial}{\partial H} \left\{ \sum_v p_v e^{-H_v/kT} \right\}$$

Die mathematischen Schwierigkeiten zur Auswertung von Gl. (3) bestehen bekanntlich in der exakten Berechnung von p_v und H_v . Es kommen daher im allgemeinen Näherungsverfahren zur Anwendung.

² L. HULTHÉN, Ark. Mat., 26 A, Nr. 11, Stockholm 1938.

Im Falle einer linearen Kette mit $f = 1$ lässt sich jedoch, wie HULTHÉN gezeigt hat, die Berechnung des Eigenwertspektrums von Gl. (3) exakt durchführen, soweit die Eigenwerte zu reellen Wellenzahlen gehören. Mit der Kenntnis dieses Teilspektrums kann man z. B. die Suszeptibilität am absoluten Nullpunkt³ im antiferromagnetischen Falle, aber auch das magnetische Moment für $I > 0$ (vgl. [1]) berechnen. Da $\hat{A} = I \sum_{k<l} Q_{k,l}$ mit $\hat{M} = -2\mu_B (\vec{\xi}_k, \sum_k \vec{\sigma}_k)$ vertauschbar ist und bei geeigneter Wahl jede Eigenfunktion von \hat{A} auch Eigenfunktion von \hat{M} ist, genügt es, die Hauptachsentransformation von \hat{A} durchzuführen, wobei der Darstellungsräum von \hat{A} durch die 2^N Spinoren

$$w^{(n_1, n_2, \dots, n_r)} = u_1^- \dots u_{n_1}^+ \dots u_{n_r}^+ \dots u_N^-, \quad (n_1 < n_2 < \dots < n_r)$$

gegeben ist. Die u_i spannen jeweils einen Darstellungsräum $D_{1/2}$ auf.

Das zur Eigenwertgleichung gehörige lineare Gleichungssystem hat die Form:

$$E a_{n_1 \dots n_r} = \sum_{\{n'_1 \dots n'_r\}} (a_{n_1, n_2, \dots, n_r} - a_{n'_1, n'_2, \dots, n'_r}) \quad (4)$$

Die $a_{n_1 \dots n_r}$ sind die Entwicklungskoeffizienten der Eigenfunktionen von \hat{A} mit dem Grundvektorensystem $w^{(n_1 \dots n_r)}$. In Gl. (4) ist die Summe über alle Kombinationen $(n'_1 \dots n'_r)$ r -ter Klasse aus den Zahlen $1, 2, \dots, N$ zu erstrecken, welche in $n_1 \dots n_r$ lediglich durch Anwendung einer auf Nachbaratome wirkenden Transposition (k, l) übergehen.

Für $f = 1$ erhält man das folgende Eigenwertspektrum

$$E = 2\varepsilon = 2I \sum_{j=1}^s (1 - \cos k_j), \quad 0 < s \leq r \quad (a)$$

$$N k_j = 2\pi \lambda_j + \sum_l \varphi_{j,l}, \quad 0 \leq \lambda_j \leq N-1 \quad (b) \quad (5)$$

$$2 \operatorname{ctg} \varphi_{j,l} = \operatorname{ctg} \frac{1}{2} k_j - \operatorname{ctg} \frac{1}{2} k_l \quad (c)$$

Die $a_{n_1 \dots n_r}$ werden dabei durch „ebene Spinwellen“ der Form

$$a_{n_1 \dots n_r} \stackrel{(k_1 \dots k_s)}{=} a_{n_1 \dots n_r} = \sum_{C_s} \sum_{P_s} e^{i \left\{ \sum_{j=1}^s k_{P_j} \cdot n_{\mu_j} + \sum_{j < l} \varphi_{P_j, P_l} \right\}} \quad (5d)$$

dargestellt. Mit P_s wird eine beliebige Permutation der Wellenzahlen k_1, k_2, \dots, k_s bezeichnet, unter C_s sind die Kombinationen der r -Zahlen n_1, n_2, \dots, n_r zur s -ten Klassen zu verstehen (z. B.: $n_{\mu_1}, n_{\mu_2}, \dots, n_{\mu_s}$).

³ Vgl. L. HULTHÉN 1. c.

Für $f \geq 2$ geht das System (4) in

$$\sum_{k=1}^r \sum_{\nu=-f}^{+f} \{a_{n_1 n_2 \dots n_r} - a_{n_1 \dots n_k - \nu \dots n_r}\} = 2 \varepsilon a_{n_1 n_2 \dots n_r} \quad (6)$$

über, wobei wir den allgemeinen Fall voraussetzen, daß die $r +$ Spine nicht benachbart liegen. Wir bezeichnen die zum System (6) gehörenden Gleichungen als Hauptgleichungen. Zu diesen treten noch eine Anzahl von Nebengleichungen, welche benachbarten $+$ Spine entsprechen. Im ferromagnetischen Falle sind in den unteren Energieniveaus fast alle Spinvektoren in einer Richtung ($r \ll N$) und die Nebengleichungen werden infolgedessen nur einen verschwindenden Anteil des Gesamtsystems ausmachen.

Für den ferromagnetischen Grenzfall wird es also genügen, nur die Hauptgleichungen zu berücksichtigen. Geht man in Gl. (6) mit einem Linearaggregat von ebenen Spinwellen ein, so erhält man unmittelbar für die $a_{n_1 \dots n_r}$ Gl. (5 d). Der Zusammenhang zwischen den Energiestufen und den Wellenzahlen ist dabei durch

$$\boxed{E = 2 \varepsilon = 2 I \sum_{j=1}^s \sum_{\nu=1}^f (1 - \cos \nu k_j)} \quad (7)$$

gegeben⁴.

Man verschafft sich auf die folgende Weise einen Überblick der mit Gl. (5 b), (c), (d) und Gl. (7) gewonnenen Lösungsmannigfaltigkeit. Wie im Falle $f = 1$ erkennt man, daß zu einem Eigenwert E gemäß Gl. (7) die folgenden Eigenfunktionen gehören:

$$\psi_{k_1 \dots k_s}^{(r=s)}, \psi_{k_1 \dots k_s}^{(r=s+1)}, \dots, \psi_{k_1 \dots k_s}^{(r=N/2)}, \psi_{k_1 \dots k_s}^{(r=N/2+1)}, \dots, \psi_{k_1 \dots k_s}^{(r=N-s)} \quad (8)$$

wobei die $\psi_{k_1 \dots k_s}^{(r)}$ durch:

$$\psi_{k_1 \dots k_s}^{(r=s+p)} = \sum a_{n_1 \dots n_s + p}^{(k_1 k_2 \dots k_s)} \cdot w^{(n_1 \dots n_s + p)}$$

gegeben sind. — Da r und M_s mittels der Beziehung

$$M_s = r - \frac{1}{2}N$$

zusammenhängen, sind wie früher die angeführten Eigenfunktionen den folgenden M_s -Werten zugeordnet:

$$M_s = s - N/2, \quad s - N/2 + 1, \dots, 0, 1, \dots, N/2 - s$$

Daraus ist ersichtlich, daß das System (8) einen irreduziblen, drehungsinvarianten Unterraum R_{N-2s+1} von R_{2N} bildet, der durch die Spinquantenzahl $S = \text{Max } M_s = N/2 - s$ charakterisiert wird. Aus der

⁴ Die angeführten Lösungen befriedigen übrigens auch alle Nebengleichungen, welche zwei unmittelbar angrenzenden $+$ Spine zugeordnet sind.

CLEBSCH-GORDANSchen Reihe ist anderseits die Zerfällung des Spinraumes in seine irreduziblen Bestandteile ersichtlich. Man erhält:

$$D = D_{1/2} \times D_{1/2} \times \dots \times D_{1/2} = \alpha_1 D_{S_1} + \alpha_2 D_{S_2} + \dots + \alpha_h D_{S_h} \quad (9)$$

wobei:

$$S_1 = N/2, S_2 = N/2 - 1, \dots, S_h = \begin{cases} \frac{1}{2} & (N = \text{ungerade}) \\ 0 & (N = \text{gerade}) \end{cases}$$

Die Anzahl α_i der zu S_i gehörigen irreduziblen Räume ist durch

$$\alpha_i = \binom{N}{N/2 + S_i} \frac{2S_i + 1}{N/2 + S_i + 1} \quad (10)$$

bestimmt⁵. Im Anhang wird Gl. (10) an Hand eines in einer früheren Arbeit angegebenen Diagrammes abgeleitet⁶. Auf Grund eines bekannten Satzes der Darstellungstheorie ist die Maximalzahl der verschiedenen Energieniveaus der Eigenwertgleichung (6) mit

$$z = \sum_{i=1}^h \alpha_i$$

gegeben, während sich nach dem HULTHÉNSchen Verfahren nach Gl. (7) nur h verschiedene Energieniveaus E_i berechnen lassen. Zu jedem S_i besitzt der Wechselwirkungsoperator \hat{A}_i maximal verschiedene Eigenwerte und von diesen liefert Gl. (7) gerade immer einen⁷. Damit ist ganz allgemein die Leistungsfähigkeit des Lösungsansatzes mittels ebener Spinwellen und reellen Wellenzahlen erfaßt. Da für große N die Niveaus sehr eng aneinander rücken, genügt jedoch zur Berechnung des magnetischen Momentes das durch Gl. (7) erfaßte Energiespektrum, wenn die lineare Kette aus einer großen Zahl von Atomen besteht.

⁵ Siehe F. BLOCH, Z. Phys. **57**, 545 (1929).

⁶ Siehe E. LEDINEGG, P. URBAN, Acta Phys. Austr. **6**, 7 (1952).

⁷ Für Atomketten mit geringer Partnerzahl lassen sich die Eigenwerte von A streng berechnen. Für $N = 4$ sind in der Tabelle die Eigenwerte nach den oben angegebenen gruppentheoretischen Gesichtspunkten geordnet:

Darstellungsraum	α_i	Zahl der Funktionen je Darstellung	S	\vec{S}^2	\hat{A}/I	Eigenwerte von:
D_2	1	5	2	6	0	
D_1	3	3	1	2		$\left\{ \begin{array}{l} 4 \\ 2, 2 \end{array} \right.$
D_0	2	1	0	0		$\left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 6 \end{array} \right.$

§ 3. Die zugeordnete Integralgleichung

Setzt man $N \gg 1$ voraus, so läßt sich analog dem Vorgehen von HULTHÉN, die Gl. (5 b) und (5 c) gemäß [1] in eine Integralgleichung umwandeln, welche, nach einer Dichtefunktion $f(\xi)$ aufgelöst, in Verbindung mit Gl. (7) das Energiespektrum in der Umgebung des tiefsten Eigenwertes liefert. Zu diesem Zweck wird zunächst

$$x = \frac{2}{N} j, \quad (\lambda_j = 2j - 1 = Nx)$$

als kontinuierliche Variable eingeführt, und beachtet, daß die Eigenwertverteilung in der Umgebung des tiefsten Eigenwertes $E = 0$ durch

$$r = s = \frac{N}{2} \sigma, \quad (0 \leq \sigma \ll 1)$$

bestimmt erscheint⁸. Mit Hilfe des Transformationsschemas

$$\begin{array}{ccc} k \rightarrow k(x) & \nearrow x = x(k); & \frac{dx(k)}{dk} \rightarrow -\frac{dx}{d\xi} = f(\xi) \\ j \rightarrow x & \searrow k; & k \rightarrow \xi \end{array}$$

wobei $\xi = \operatorname{ctg} \frac{1}{2} k(x)$ zu setzen ist, erhält man schließlich an Stelle der Gl. (5 b), (5 c) und (7) das System

$$E = NI \int_{\xi_0}^{\infty} \sum_{v=1}^f \{1 - \cos v k(\xi)\} f(\xi) d\xi = E(\xi_0) \quad (11 \text{ a})$$

$$\frac{2}{\pi} \frac{1}{1 + \xi^2} = f(\xi) + \frac{2}{\pi} \int_{\xi_0}^{\infty} \frac{f(\eta)}{4 + (\xi - \eta)^2} d\eta \quad (11 \text{ b})$$

mit

$$\int_{\xi_0}^{\infty} f(\xi) d\xi = \sigma, \quad \sigma \ll 1, \quad (\xi_0 \gg 1) \quad (11 \text{ c})$$

Daraus bekommt man das Energiespektrum in Abhängigkeit von ξ_0 , bzw. σ . Zur bequemeren Auswertung von Gl. (11 a) ist es zweckmäßig, die im Integranden auftretende Summe umzuformen, so daß nur mehr gerade Potenzen von $\cos k/2$, bzw. $\sin k/2$ auftreten. Man erhält:

$$\sum_{v=1}^f (1 - \cos v k) = \frac{1}{2} \left\{ 2f + 1 - \cos^2 k/2 \sum_{v=0}^f \binom{2f+1}{2v+1} (-1)^v \operatorname{tg}^2 k/2 \right\}$$

Beachtet man noch die Beziehungen

$$\operatorname{ctg} k/2 = \eta, \quad \cos k/2 = \frac{\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}}$$

⁸ Siehe E. LEDINEGG, P. URBAN, Acta Phys. Austr. **6**, 257 (1953).

so kommt:

$$\sum_{\nu=1}^f (1 - \cos \nu k) = \frac{1}{2} \left\{ 2f + 1 - \frac{1}{(1+\eta^2)^f} \sum_{\nu=0}^f \binom{2f+1}{2\nu+1} (-1)^\nu \eta^{2(f-\nu)} \right\}$$

oder:

$$\sum_{\nu=1}^f (1 - \cos \nu k) = (1 + \eta^2)^{-f} \cdot \sum_{\nu=1}^f A_{\nu}^{(f)} \eta^{2(f-\nu)}$$

mit

$$A_{\nu}^{(f)} = \frac{1}{2} \left\{ (2f+1) \binom{f}{\nu} - (-1)^\nu \binom{2f+1}{2\nu+1} \right\} \quad (12)$$

Mit Gl. (12) geht Gl. (11 a) in

$$E(\xi_0) = NI \sum_{\nu=1}^f \int_{\xi_0}^{\infty} \frac{A_{\nu}^{(f)} \eta^{2(f-\nu)}}{(1+\eta^2)^f} \cdot f(\eta) d\eta \quad (13 \text{ a})$$

über.

§ 4. Die Berechnung des magnetischen Momentes am absoluten Nullpunkt

Da man nur die Kenntnis des Energiespektrums in der Nähe von E_0 benötigt ($\sigma \ll 1$), genügt es, die Integralgleichung (11 b) asymptotisch, das heißt für $\xi_0 \gg 1$ aufzulösen. Dies wurde bereits in [1] durchgeführt; man findet für die Dichtefunktion $f(\xi)$:

$$f(\xi) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+\xi^2} \cdot \frac{1}{\left\{ \frac{3}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} (\xi_0 - \xi) \right\}} \quad (14 \text{ a})$$

Wir führen Gl. (14 a) in Gl. (13 a) ein und erhalten:

$$E(\xi_0) = NI \sum_{\nu=1}^f \int_{\xi_0}^{\infty} \frac{A_{\nu}^{(f)} \eta^{2(f-\nu)}}{(1+\eta^2)^{f+1}} \cdot \frac{1}{\left\{ \frac{3}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} (\xi_0 - \eta) \right\}} d\eta.$$

Wegen $\xi_0 \gg 1$ genügt es auch hier, die Integration asymptotisch durchzuführen.

Beachtet man ferner, daß nur die niedrigste Potenz von $1/\xi_0$ von Interesse ist, so hat man nur das erste Glied in der rechtsstehenden Summe von Gl. (13 b) zu berücksichtigen. Damit wird:

$$E(\xi_0) = \frac{1}{\pi} NI A_1^{(f)} \int_{\xi_0}^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^4} = \frac{1}{3\pi} NI A_1^{(f)} \frac{1}{\xi_0^3} \quad (13 \text{ c})$$

mit

$$A_1^{(f)} = \frac{1}{2} \left\{ (f+1) f + \binom{2f+1}{3} \right\} \quad (13 \text{ d})$$

Wegen

$$\xi_0 = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sigma}$$

bekommt man mit Gl. (3) das Eigenwertspektrum des HAMILTON-Operators \hat{H} :

$$H(\sigma) = N \left\{ \pi^2 I A_1^{(f)} \frac{\sigma^3}{3} - \mu_B(\sigma - 1) H \right\}$$

H bedeutet das äußere Magnetfeld, welches antiparallel zur Spinrichtung des Grundzustandes gerichtet ist. $H = H(\sigma)$ besitzt an der Stelle

$$\sigma_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_B H}{A_1^{(f)} I}}$$

ein Minimum, welches dem stabilen Zustand der Kette entspricht. Da das magnetische Moment ganz allgemein durch $J = N \mu_B(1 - \sigma)$ gegeben ist, erhält man durch Einsetzen von σ_0 :

$$\boxed{J = N \mu_B \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_B H}{A_1^{(f)} I}} \right\}} \quad (14)$$

Aus Gl. (14) ist zu entnehmen

1. ein antiparallel gerichtetes Magnetfeld ändert im wesentlichen die bestehende Spinordnung des Grundzustandes nur wenig, falls H genügend klein angenommen wird. Mit $H \rightarrow 0$ geht J stetig in den Sättigungswert über.

2. Wird die Austauschwechselwirkung auf eine immer größere Anzahl von Nachbaratomen ausgedehnt, so wird das desorientierende Glied beliebig klein (s. Abb. 1)⁹.

Daraus kann man den Schluß ziehen, daß eine lineare Kette am absoluten Nullpunkt ein ferromagnetisches Verhalten aufweist, wenn man darunter das Bestreben der Kette versteht, die bestehende Spinordnung (das ist den maximalen Sättigungswert) aufrecht zu erhalten. Darauf hinaus gibt Gl. (14) einen Hinweis darauf, daß der ferromagnetische Zustand einer Substanz, primär durch die Zahl der in Austauschwechselwirkung stehenden Atome bestimmt erscheint, während die Gitterkonfiguration nur insoferne eingeht, als durch die damit bestimmte Geometrie die Zahl der nächsten Nachbarn festgelegt

⁹ Wir haben dabei vorausgesetzt, daß I für alle Nachbaratome den gleichen Wert besitzt ($I = I_{k,l}$). Dies ist näherungsweise für eine passend verknäuelte Kette zu erreichen.

wird. Dadurch verliert z. B. die Aussage, daß ein Flächen- oder lineares Gitter prinzipiell nicht ferromagnetisch sein kann, seinen absoluten Sinn.

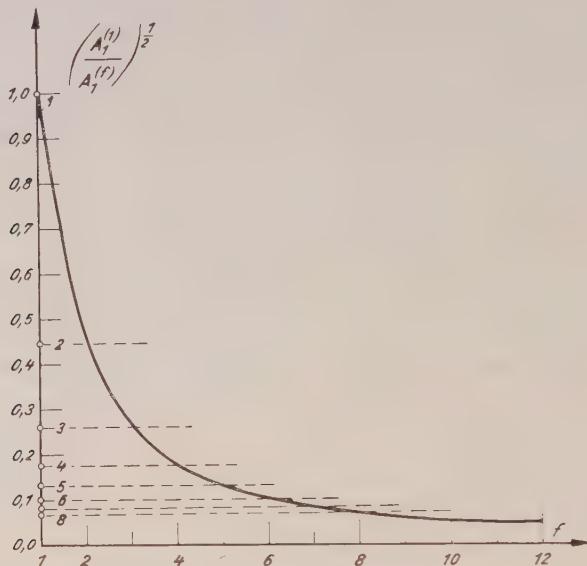


Abb. 1. Der Schwächungsfaktor $\sqrt{A_1^{(1)}/A_1^{(f)}}$ in Abhängigkeit von der Zahl f der nächsten Nachbarn

§ 5. Anhang. Berechnung von α_i

Wir setzen die Atom-Anzahl der Kette als gerade voraus. Die Koeffizienten der CLEBSCH-GORDANSCHEN Reihe Gl. (9) bestimmen sich sukzessive aus:

$$D_{1/2} \times D_{1/2} = D_1 + D_0$$

Dies führt, wie in [2] bemerkt wurde, auf die Bestimmung der Anzahl aller monoton steigenden Stufenzüge, welche im Netzwerke der Abb. (2 a) vorkommen können und A als Ausgangspunkt, B als Endpunkt besitzen. Je nach der Wahl von B , das heißt von S_i wird dadurch α_i festgelegt.

Es werde zunächst α_1 berechnet. Man hat $n = p$ zu setzen und die Anzahl aller monotonen Stufenzüge eines in einem quadratischen Gitter eingebetteten Quadrates zu berechnen, die unter der Diagonale $A\ B$ liegen (s. Abb. 2 b). Bewertet man jeden Sprung um eine Einheit mit 1, jede waagrechte Stufe mit 0, so läßt sich der Normalstufenzug (a) (s. Abb. 2 b) durch die 2 n -gliedrige Folge:

$$B \quad 1 \quad 0 \quad A \quad (15\ a)$$

darstellen. Jeder andere zulässige Stufenzug (das heißt unter der Diagonale liegenden Stufenzug) entsteht aus (15 a) durch eine beliebige

Linksverrückung der Einser („linksschlagende Einser“). Man hat daher als äquivalentes Problem die Anzahl der Kombinationen zu bestimmen, welche aus (15 a) durch linksschlagende Einser gebildet werden. Anstelle von (15 a) wird nun die Folge:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \bullet & \bullet \\ A_1 & | & A_2 & | & A_3 & | & \dots & | & A_n \end{array} \quad (15 \text{ b})$$

betrachtet, welche die gleiche Anzahl von Kombinationen $\hat{C}_{n-1}^{2^n}$ mittels linksschlagender Einser wie (15 a) besitzt. In (15 b) wird jedes Paar

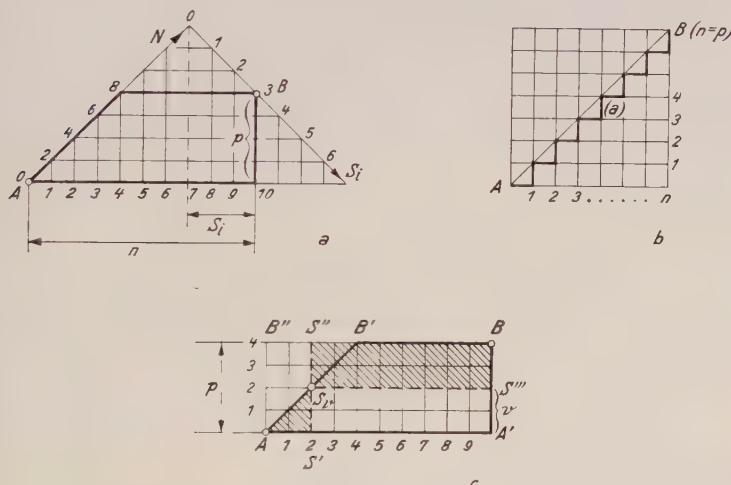


Abb. 2. (a) Die Anzahl aller monotonen Stufenzüge, welche von A nach B führen, bestimmen die $\alpha(S_i, N)$. Der Zusammenhang zwischen n und p mit N und S_i ist aus der Fig. abzulesen.

(b) Alle zulässigen Treppenzüge liegen unterhalb des „Normal-Treppenzuges“ (a). Der Treppenzug (a) kann durch die Folge $1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \dots 1 \ 0$ dargestellt werden. Daraus ergibt sich die Gesamtheit der zulässigen Treppenzüge durch beliebige Linksverschiebungen der Einser.

(c) Zur Klasseneinteilung der monoton steigenden Treppenzüge im Rechtecke ($A \ A' \ B \ B''$): Jede Klasse ist durch die Gesamtheit aller Treppenzüge bestimmt, welche entweder unterhalb oder oberhalb von $A \ B'$ liegen, bzw. die Gerade $A \ B'$ zum ersten Mal in S_ν ($\nu = 1, \dots, (n-1)$) schneiden. Die Anzahl der Treppenzüge in ($A \ S' \ S_\nu$), bzw. ($S_\nu \ S'' \ B \ S'''$) ist durch

$$\frac{1}{\nu+1} \binom{2\nu}{\nu}, \quad \text{bzw.} \quad \binom{n+p-2\nu}{p-\nu}$$

gegeben, während im Rechteck ($A \ A' \ B \ B''$) insgesamt $\binom{n+p}{p}$ zulässige Treppenzüge vorhanden sind.

$(0, 1)$ in eine Klasse A_ν ($\nu = 1 \dots n$) zusammengefaßt. Nun bildet man alle zyklischen Vertauschungen der Anordnung $A_1, A_2 \dots A_n$:

$$\begin{aligned} & A_1 A_2 A_3 \dots A_n \\ & A_2 A_3 A_4 \dots A_1 \\ & A_3 A_4 A_5 \dots A_2 \\ & A_n A_1 A_2 \dots A_{n-1} \end{aligned} \quad (15 \text{ c})$$

und greift aus jeder der n -Anordnungen (15 c) die Kombinationen hervor, welche sich nach dem Verfahren der „linksschlagenden Einser“ ergeben. Man hat dabei jedesmal von der Normalstellung 01, 01, ..., 00 auszugehen. Prinzipiell bleiben jeweils die Klassen an letzter Stelle jeder Zeile ohne Belegung. Damit erhält man in jeder Zeile die gleiche Anzahl von Kombinationen, also stets \hat{C}_{n-1}^{2n} . Ferner sind auf Grund dieses Verfahrens, die durch linksschlagende Einser entstandenen Kombinationen verschiedener Zeilen stets verschieden. Schließlich tritt jede beliebige Kombination von (15 b) einmal und nur einmal in (15 c) auf. Da es genau $\binom{2n}{n-1}$ derartige Kombinationen gibt, hat man:

$$\text{Im Falle } \rho < n \text{ ist die Zahl der monoton steigenden Treppenzüge des in Abb. 2 c gezeichneten Trapezes zu berechnen, welche unterhalb der Geraden } A, B' \text{ liegen. Wir betrachten dazu alle monotonen Treppenzüge des Rechteckes } A, A', B, B'' \left(\text{deren gibt es } \binom{n+\rho}{\rho} \right). \text{ Nun verläuft jeder Treppenzug entweder oberhalb oder unterhalb von } A, B', \text{ bzw. er hat einen ersten Schnittpunkt } S_i \text{ mit der Geraden } A B'. \text{ Daraus ergibt sich eine elementefremde Klasseneinteilung der möglichen Treppenzüge, aus welcher sich unmittelbar für die Anzahl der unterhalb } A, B' \text{ liegenden Treppenzüge der Ausdruck:}$$

$$\alpha_{n,\rho} = \binom{n+\rho}{\rho} - \sum_{v=1}^{\rho} \frac{1}{v+1} \binom{2v}{v} \cdot \binom{n+\rho-2v}{\rho-v} \quad (17 \text{ a})$$

ergibt. Beachtet man ferner die Identität:

$$\binom{n+\rho}{\rho-1} = \sum_{v=1}^{\rho} \frac{1}{v} \binom{2v}{v-1} \binom{\rho+n-2v}{\rho-v} \quad (17 \text{ b})$$

welche mit Benützung von Gl. (16) folgt, so bekommt man aus Gl. (17 a):

$$\alpha_{n,\rho} = \binom{n+\rho}{\rho} - \binom{n+\rho}{\rho-1} = \frac{n+1-\rho}{n+1} \binom{n+\rho}{\rho}$$

Da

$$n = N/2 - S_i, \quad \rho = N/2 + S_i$$

zu setzen ist (gemäß Abb. 2), wird:

$$\alpha(S_i) = \binom{N}{N/2 - S_i} - \binom{N}{N/2 - S_i - 1} = \frac{2S_i + 1}{N/2 + S_i + 1} \binom{N}{N/2 - S_i}$$

w.z.b.w.

Untersuchung eines ionisierten Gases mittels schwacher elektrischer Wechselfelder*

2. Erregung erzwungener Schwingungen im Inneren des Gases

Von

Angelika Székely

Aus dem physikalischen Institut der Universität Graz

Mit 14 Abbildungen

(*Eingegangen am 22. März 1958*)

Zusammenfassung

Leitwert und Kapazität eines Kondensators, der mit dem Plasma einer Glühkathoden-Niederdruckentladung erfüllt ist, haben bei zahlreichen Frequenzen im Gebiet von 1 bis 10 MHz abnormale Werte, was besonders gut daran erkannt wird, daß die Kurven über die Abhängigkeit vom Anodenstrom vom normalen Verlauf abweichen. Zur Erklärung wird angenommen, daß durch die Meßspannungen erzwungene Schwingungen im Inneren des Gases erregt werden.

Die Kurven über die Frequenzabhängigkeit von Leitwert und Kapazität bei festgehaltenem Anodenstrom lassen deutlich zwei Resonanzstellen erkennen, die bei den Frequenzen liegen, bei denen schwache selberregte Schwingungen beobachtbar sind. Es wird geschlossen, daß in dem Bereich dieser Frequenzen unter dem Einfluß der Meßspannungen geordnete erzwungene Schwingungen der Plasmalelektronen auftreten, da sich der Ionisationskondensator wie ein Schwingquarz verhält: der Leitwert hat an der Resonanzstelle ein Maximum und ist in der Umgebung dieser Stelle stark über den normalen ohne Schwingungen zu erwartenden Wert erhöht, die Kapazitätsänderung ist an der Resonanzstelle Null und hat unter- und oberhalb dieser Stelle verschiedenes Vorzeichen. In sehr schematisierter Form wird der Vergleich des Plasmas mit dem Schwingquarz zur Einführung eines Piezo- und Elastizitätsmoduls des Plasmas benutzt, woraus sich ergibt, daß die Eigenfrequenzen des Plasmas durch die elektrische Feldstärke in den Plasmarandschichten bestimmt wird, die niedrigere in der kathodenseitigen Randschicht, die höhere in der Randschicht an den Stirnflächen des Kondensators.

Außer den geordneten Schwingungen der Plasma-Elektronen scheinen aber auch ungeordnete Schwingungen durch die Meßspannungen erregt zu werden; solche ungeordnete Schwingungen müssen zur Erklärung der Herabsetzung des Leitwertes unter den Normalwert namentlich im Frequenzbereich um 3 MHz herangezogen werden.

* Herrn Professor Dr. VICTOR F. HESS zum 75. Geburtstag gewidmet.

Im ersten Teil¹ wurde über Messungen des Leitwertes und der Kapazität eines mit ionisiertem Gas gefüllten Kondensators berichtet. Dadurch, daß diese Messungen in einem sehr großen Frequenzbereich ausgeführt wurden, gelang die Feststellung der verschiedenen Arten von freien Elektronen im Gas. Es mußten jedoch sorgfältig nur jene Ergebnisse ausgewählt werden, die nicht durch Schwingungen im Gas beeinflußt waren. In diesem zweiten Teil sollen die Messungen beim Auftreten dieser Störung besprochen und gedeutet werden.

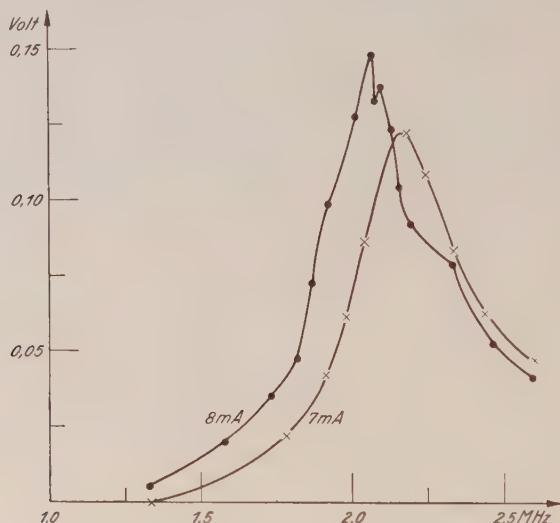


Abb. 1. Selbsterregte Schwingungen bei 7 und 8 mA Anodenstrom, 4,0 V Heizung

Der untersuchte Ionisationskondensator war so wie im ersten Teil der aus dem Gitter (das mit der indirekt geheizten Glühkathode verbunden war) und der Anode der Philips-Triode Nr. 4690 gebildete Zylinderkondensator², der mit He von 0,5 mm Druck gefüllt ist. Die Gleichstromcharakteristik der verwendeten Gasstrecke ist in Teil I in den Abb. 2 a und 5 a wiedergegeben. Zur Messung des durch die Ionisierung erzeugten Leitwertes L und der Kapazitätsänderung Dc des Kondensators wurde wieder die Resonanzmethode benutzt; die verwendete Schaltung ist in Abb. 1 von Teil I zu sehen. Der untersuchte Kondensator lag also der Kapazität eines Resonanzkreises parallel und ein Hochfrequenzvoltmeter diente zur Messung der Hochfrequenzspannung an seinen Enden. Diese sinkt beim Eintritt der Ionisierung; durch Verstellen des Drehplattenkondensators wurde wieder auf Höchstausschlag

¹ SZÉKELY, Acta Phys. Austr. 12, 91 (1958).

² Genauere Angaben in Teil I, S. 92, Anm. 1

eingestellt. Die Änderung am Drehplattenkondensator DC ist entgegengesetzt gleich Dc . Der Vergleich der Spannungsverminderung durch die ionisierte Gasstrecke mit der bei Parallelschalten bekannter Stäbchen-Widerstände ermöglicht die Bestimmung des Leitwertes L der Gasstrecke.

Verhinderung des Einflusses selbsterregter Schwingungen

In gewissen Frequenzbereichen konnte bei Verwendung sehr kleiner Meßspannungen keine Messung durchgeführt werden, weil beim Einschalten der Entladung die Spannung am Hochfrequenzvoltmeter stieg, statt infolge des durch die Ionisation geschaffenen Leitwertes zu sinken; in diesen Fällen blieb auch nach dem Ausschalten der Meßspannung ein Ausschlag im Voltmeter, der offenbar durch selbsterregte Schwingungen im ionisierten Gas erzeugt wurde³. In den Abb. 1 bis 3 sind Messungen solcher selbsterregten Schwingungen dargestellt. Abb 1 wurde bei 4,0 V Heizspannung und 7 bzw. 8 mA Anodenstrom erhalten, die Abszissen sind die Resonanzfrequenzen des Resonanzkreises, wie sie ohne Entladung gemessen werden, die Ordinaten sind die bei den verschiedenen Abstimmungen abgelesenen Hochfrequenzspannungen durch die selbsterregten Schwingungen, deren Höchstwert nahe bei 2 MHz liegt. Die drei Kurven der Abb. 2 wurden bei 10 mA Anodenstrom aufgenommen; die Kurven a und b ergaben sich bei zwei etwas verschiedenen Heizungen, Kurve c wurde bei Änderung der Spule des Resonanzkreises erhalten. Bei gewissen Einstellungen war eine starke Unruhe

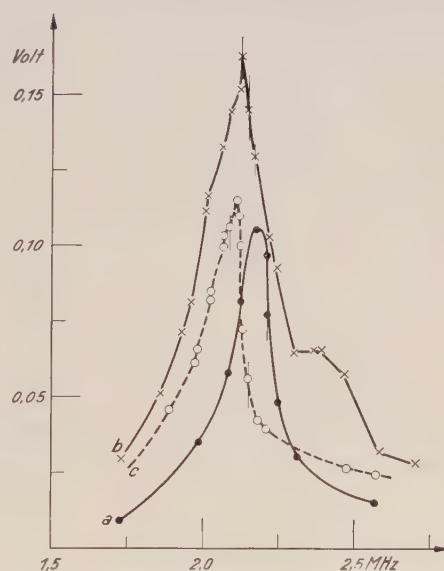


Abb. 2. Selbsterregte Schwingungen bei 10 mA Anodenstrom.
a) 4,0 V Heizung, b) 4,2 V Heizung, c) wie bei b 4,2 V Heizung, aber größere Selbstinduktion im Resonanzkreis

³ Von den vielen Arbeiten über selbsterregte Schwingungen sei die von COBINE und GALLAGHER, Journ. Frankl. Inst. **243**, 41 (1947), besonders erwähnt und auf die Literaturangaben in folgenden Arbeiten hingewiesen: EMELEUS, Report of the international symposium on electrical discharges in gases, The Hague 1955, S. 66; EMELEUS, N. 3 del Suppl. al Vol. 3, Ser. X. del Nuov. Cim. S. 490, 1956

des Ausschlags zu erkennen, was durch kleine Striche durch die Beobachtungspunkte angedeutet ist; man hat den Eindruck großer Instabilität der selbsterregten Schwingungen. Abb. 3 zeigt die selbsterregten Schwingungen, die bei Abstimmung des Resonanzkreises auf Frequenzen um 7 MHz bei 15 mA Anodenstrom beobachtbar waren. Kurve *a* wurde bei 4,2 Volt Heizung, *b* bei 4,1 V erhalten. Die Spannungen der selbsterregten Schwingungen sind bei dieser hohen Frequenz wesentlich geringer als die bei 2 MHz.

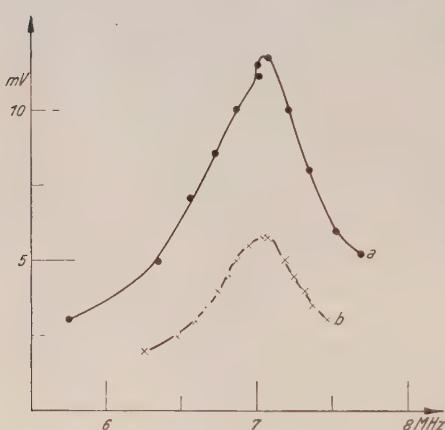


Abb. 3. Selbsterregte Schwingungen bei 15 mA Anodenstrom. *a*) 4,2 V Heizung, *b*) 4,1 V Heizung

Will man in den Meßbereichen, in denen selbsterregte Schwingungen zu beobachten sind, Leitwert und Kapazität der ionisierten Gasstrecke ermitteln, so muß man Meßspannungen benützen, die mindestens 2- bis 3-mal größer sind als die bei Selbsterregung auftretenden Spannungen. Hält man diese Vorschrift ein, so ergeben sich Meßwerte, die von der Höhe der Meßspannung unabhängig sind. Bei den im folgenden wiedergegebenen Messungen wurde stets sorgfältig darauf geachtet, die

Meßspannungen genügend hoch zu wählen, um den Einfluß etwaiger selbsterregter Schwingungen auszuschalten. Die Meßspannungen lagen zwischen 0,2 und 2 V. Es sei hervorgehoben, daß kein Einfluß der Hochfrequenzmeßspannungen in der angegebenen Stärke auf die Gleichstromcharakteristik der Gasstrecke feststellbar war.

Der Einfluß erzwungener Schwingungen im ionisierten Gas auf die Kurven, die Leitwert und Kapazitätsänderung als Funktionen des Anodenstromes darstellen

Überraschenderweise ergaben sich in großen Frequenzbereichen überaus merkwürdige Abhängigkeiten des Leitwertes und der Kapazitätsänderung des Ionisations-Kondensators vom Anodenstrom. Es zeigten sich Abweichungen vom normalen Kurvenverlauf, die innerhalb der Fehlergrenzen reproduzierbar waren. Bevor näher auf die Messungsergebnisse eingegangen wird, sei die zur Erklärung dieser Unregelmäßigkeiten herangezogene Annahme angedeutet: Im Inneren des ionisierten Gases treten in gewissen Frequenzbereichen Schwingungen,

die durch die Meßspannungen erzwungen werden, auf⁴. Durch sie werden die Werte von L und Dc sehr stark beeinflußt⁵. Diese Deutung ergab sich erst, nachdem im Frequenzbereich 0,1 bis 0,6 MHz, in dem sich Schwingungen scheinbar gar nicht oder in sehr geringer Stärke ausbilden, die normale Abhängigkeit des L und Dc erschlossen war (Teil 1), so daß Abnormalitäten leicht als solche erkennbar waren.

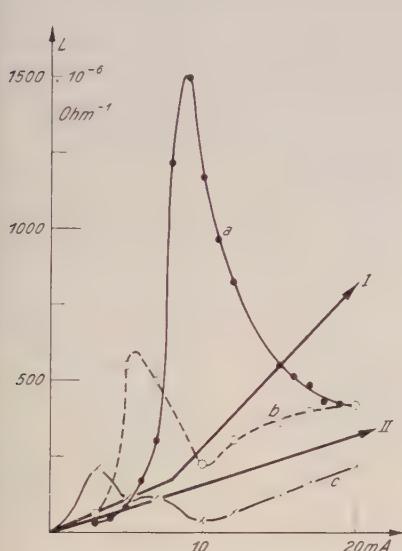


Abb. 4. Abhängigkeit des Leitwertes vom Anodenstrom. I) Normalkurve für 0,32 MHz, II) Normalkurve für Frequenzen oberhalb von etwa 1 MHz, a), b), c) beim Auftreten von erzwungenen Schwingungen bei 2, 1/2, 3/3, 0 MHz

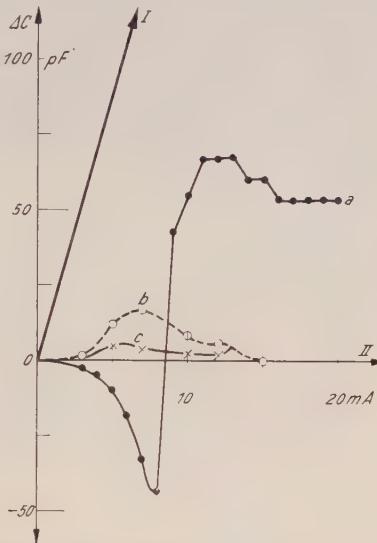


Abb. 5. Die unter denselben Bedingungen wie die Leitwerte in Abb. 4 beobachteten Kapazitätsänderungen

Die Abb. 4 bis 7 zeigen Kurven für L und DC in Abhängigkeit vom Anodenstrom. In Abb. 4 sind stark ausgezogen normale L -Kurven, die ohne Störung durch Schwingungen erhalten werden, eingezeichnet. Kurve I ist die in Teil 1, Abb. 8 b für 0,32 MHz dargestellte, Kurve II ist die für sehr hohe Frequenz geltende aus Teil 1, Abb. 8 c; ohne Schwingungen würde bei Steigerung der Frequenz über 1 MHz ein allmählicher Übergang von Kurve I zu II erfolgen. Die Kurven a, b, c der Abb. 4, die für 2,1 bzw. 2,3 bzw. 3,0 MHz bei erzwungenen Schwingungen erhalten wurden, weichen sehr stark von den Normalkurven ab: Es wurden Leitwerte beobachtet, die teils höher, teils niedriger als die

⁴ W. O. SCHUMANN, Fiat Review, Bd. 15, S. 221.

⁵ In zwei älteren Arbeiten wird ein solcher Einfluß erwähnt: GERBER, Ann. d. Phys. (5) 20, 529 (1934), erkennt das Auftreten von Plasmaschwingungen an dem Einfluß auf den Wechselstromwiderstand. STENGEL, Zt. f. Hochfr. Techn. 55, 42 (1940), stellt einen Einfluß von Schwingungen auf die imaginäre Komponente des Widerstandes fest.

Normalwerte sind. Abb. 5 zeigt die den L -Kurven der Abb. 4 entsprechenden DC -Kurven. — DC bedeutet in allen wiedergegebenen Kurven so wie im Teil I die zur Wiederabstimmung nach Eintritt der Ionisation notwendige Verstellung des Drehplattenkondensators im Resonanzkreis, sie ist entgegengesetzt gleich Dc , der Kapazitätsänderung durch die Ionisation. Die steil ansteigende Gerade I in Abb. 5 ist identisch mit dem ersten Teil der Kurve b von Abb. 9 in Teil I, sie stellt das normale Verhalten bei 0,32 MHz dar; oberhalb von etwa 1 MHz werden die Normalwerte von DC unmeßbar klein, die Normalkurve II für hohe Frequenzen fällt daher mit der Abszissenachse zusammen. Die bei erzwungenen Schwingungen erhaltenen Kurven a, b, c von Abb. 5 zeigen sehr starke Abweichungen von den Normalkurven. Am auffallendsten ist die Erscheinung, daß positive und negative DC -Werte beobachtet werden, während die Normalwerte stets positiv sind.

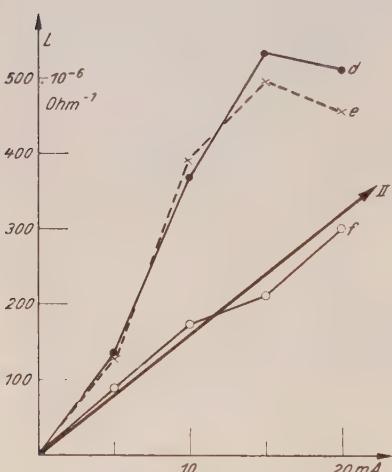


Abb. 6. Abhängigkeit des Leitwertes vom Anodenstrom. II) Normalkurve wie in Abb. 4, $d), e), f)$ beim Auftreten von erzwungenen Schwingungen bei 7, 0/7, 2/9, 0 MHz

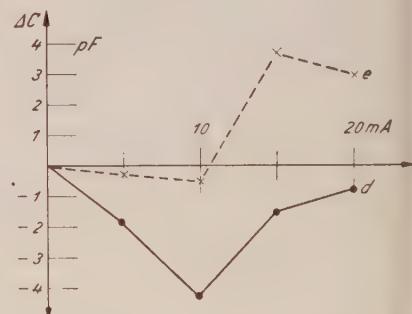


Abb. 7. Die unter denselben Bedingungen wie die Leitwerte in Abb. 6 beobachteten Kapazitätsänderungen

Für die Messungen, die in den Kurven d der Abb. 4 und 5 dargestellt sind, seien die verwendeten Meßspannungen angeführt. Vor Eintritt der Ionisation betrug die Hochfrequenzspannung am Ionisationskondensator 0,957 V und sank bei 9 mA Anodenstrom auf 0,247 V.

Die Abb. 6 und 7 sollen veranschaulichen, daß auch im Frequenzgebiet um 7 MHz sowohl die L -Kurven als auch die DC -Kurven ähnliche Störungen wie im Frequenzgebiet um 2 MHz zeigen. Es sind nur mehr die für die hohen Frequenzen geltenden Normalkurven II eingetragen. Die Kurven d, e, f gehören zu 7,0 bzw. 7,2 bzw. 9,0 MHz.

Für die Messungen, die durch Kurve d wiedergegeben werden, seien die Meßspannungen angegeben: Ohne Ionisation betrug die Spannung am Kondensator 0,299 V, bei 15 mA Anodenstrom sank sie auf 0,208 V.

Die Frequenzkurven von L und DC bei Erregung erzwungener Schwingungen: zwei ausgeprägte Resonanzstellen im Bereich 1 bis 10 MHz

Besonders aufschlußreich für die Natur der Schwingungen, die durch die Meßwechselspannungen erzwungen werden, sind die Kurven, die L und DC als Funktionen der Frequenz bei festgehaltenem Anodenstrom darstellen.

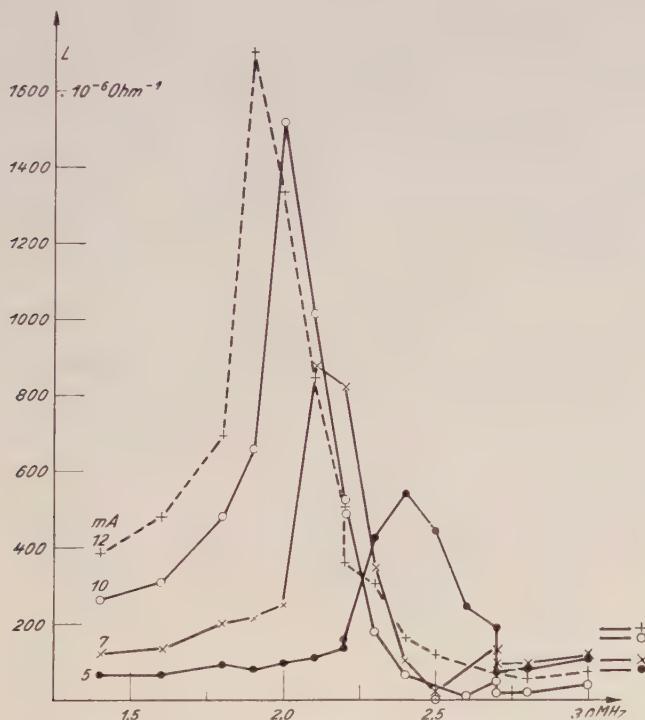


Abb. 8. Frequenzabhängigkeit des Leitwertes im Bereich 1,4 bis 3,0 MHz bei vier verschiedenen Anodenströmen

Abb. 8 zeigt die im Bereich 1,4 bis 3,0 MHz gemessenen Leitwerte in Abhängigkeit von der Frequenz ν für die vier Anodenströme 5, 7, 10, 12 mA. Die Meßwerte wurden geradlinig verbunden, da sie zu verschiedenen Zeiten bei nicht völlig gleichem Glühkathodenzustand und auch nicht immer nach Abwarten des Temperaturgleichgewichtes erhalten wurden. Trotz der dadurch bedingten Fehler erkennt man deutlich, daß die Resonanzstelle, das heißt die Stelle, an der der größte Leitwert beobachtet wird, sich mit steigendem Anodenstrom zu kleineren Frequenzen verschiebt. Am rechten Rand der Abb. 8 sind durch Horizontalstriche die L -Werte für die vier Anodenströme angegeben, die

ohne Erregung von Schwingungen durch die Meßspannungen nach den Überlegungen in Teil 1 oberhalb von 1 MHz zu erwarten sind. Die Wirkung der erzwungenen Schwingungen besteht also in der nächsten Umgebung der Resonanzstelle in einer starken Erhöhung von L . Doch wurden, wie man aus der Abbildung erkennt, bei Frequenzen, die größer als 2,3 MHz sind, auch L -Werte beobachtet, die weit unter den Normalwerten liegen.

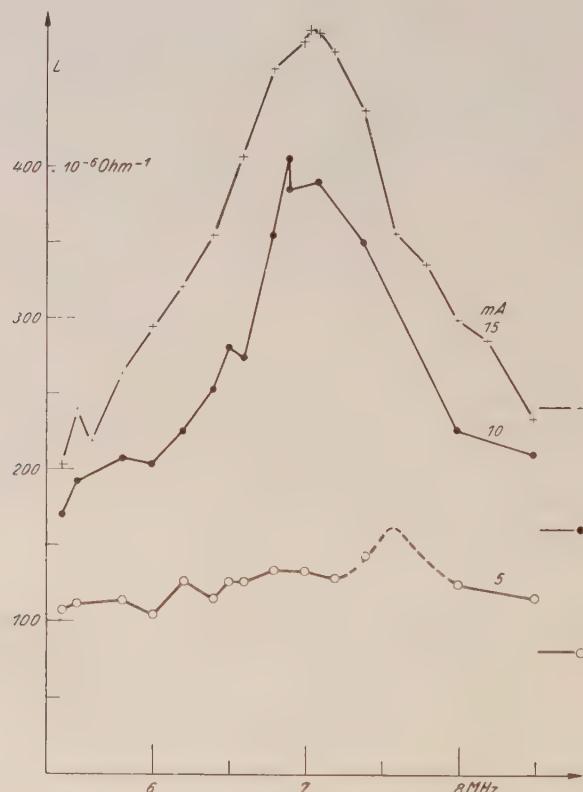


Abb. 9. Frequenzabhängigkeit des Leitwertes im Bereich 5,4 bis 8,5 MHz bei drei verschiedenen Anodenströmen

Abb. 9 stellt Messungen von L im Frequenzbereich um 7 MHz für die Anodenströme 5, 10, 15 mA dar. Es ist bei etwa 7 MHz eine Resonanz vorhanden, die Resonanzfrequenz ist nur wenig vom Anodenstrom abhängig. Auch in dieser Abbildung sind am rechten Rand die Normalwerte, die ohne Schwingungen auftreten müßten, durch horizontale Striche vermerkt.

Deutung der Frequenzkurven

a) Geordnete erzwungene Schwingungen

Die im folgenden gegebene Deutung wurde durch Beobachtungen der DC -Werte nahegelegt. Diese Beobachtungen sind recht schwierig.

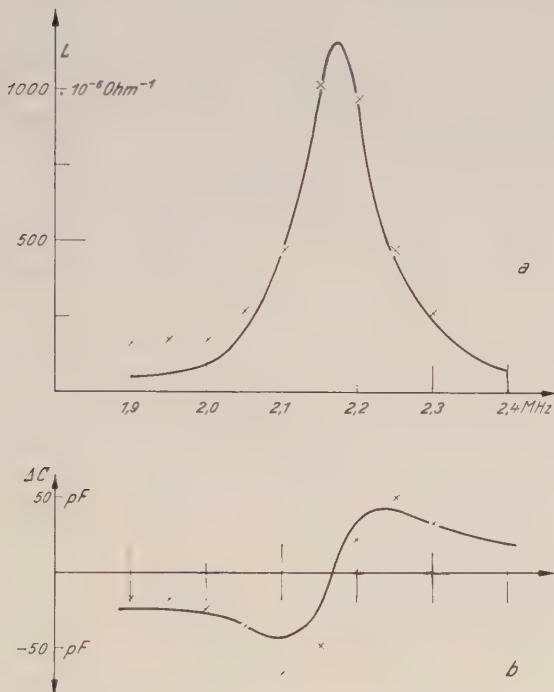


Abb. 10. Zur Deutung der Resonanz im 2 MHz-Bereich, 7 mA Anodenstrom, 4,0 V Heizung. a) Leitwert, b) Kapazitätsänderung. Die ausgezogenen Kurven sind gerechnet

Einmal sind die Beträge von DC sehr klein (besonders im Frequenzbereich um 7 MHz), ohne Schwingungen müßten sie unbeobachtbar klein sein, so daß man aus einem von Null verschiedenen DC in den höheren Frequenzbereichen mit Sicherheit auf das Vorhandensein von Schwingungen schließen kann; ferner tritt in der Nähe der Resonanzstelle eine so starke Dämpfung des Resonanzkreises durch den großen Leitwert des Ionisations-Kondensators auf, daß die Fehler bei der Abstimmung durch Verstellen des Drehplattenkondensators sehr groß sind. Doch läßt sich einwandfrei erkennen, daß bei Frequenzen unterhalb der Resonanzfrequenz die DC -Werte negativ, an der Resonanzstelle Null und bei Frequenzen oberhalb positiv sind. Diese Erscheinung ist vollkommen analog zu der an einem Resonanzkreis, dessen Kapazität ein Schwingquarz parallel liegt, wenn die ihn erregenden Frequenzen

nahe der Resonanzfrequenz des Schwingquarzes liegen⁶. Ich habe daher versucht die für die Gasstrecke erhaltenen L - und DC -Kurven im Resonanzgebiet durch Formeln gleicher Bauart, wie sie zur Deutung des Quarzresonators verwendet werden können⁷, darzustellen. Das gelang bei einigen sorgfältig aufgenommenen Kurven in der Nähe der Resonanzstelle überraschend gut. Das sei an zwei Beispielen gezeigt.

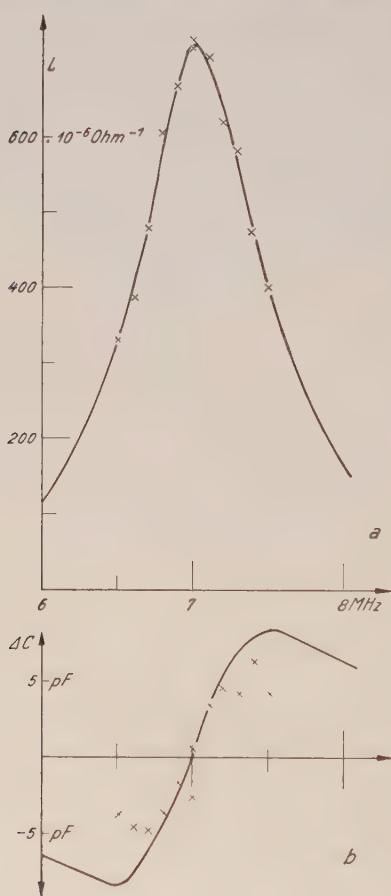


Abb. 11. Zur Deutung der Resonanz im 7 MHz-Bereich, 15 mA Anodenstrom, 4,2 V Heizung.
a) Leitwert, b) Kapazitätsänderung. Die ausgezogenen Kurven sind gerechnet

Abb. 10 enthält als Kreuze eingetragen die L - und DC -Werte, die bei sorgfältig konstant gehaltener Heizung (4,0 V) und bei genügend langem Warten nach dem Einschalten der Betriebsspannungen, so daß statio-näre Temperaturverhältnisse eingetreten waren, erhalten wurden. Der Anodenstrom betrug bei diesen Messungen 7 mA. Die ausgezogenen Kurven sind gerechnet, indem die für den Quarzresonator in der Nähe der Resonanz geltenden Formeln herangezogen wurden⁸.

$$L = k \frac{\nu \beta}{(r_0 - r)^2 + \beta^2} \quad (A)$$

$$\Delta C = \frac{k}{2 \pi} \frac{r_0 - r}{(r_0 - r)^2 + \beta^2} \quad (B)$$

Darin ist ν_0 die Resonanzfrequenz, k ein durch die Quarzkonstanten bestimmter Proportionalitätsfaktor, β eine Dämpfungskonstante, die für den Schwingquarz proportional zu ν_0^2 gesetzt werden kann.

Für die Werte $k = 32,4 \cdot 10^{-6}$ Ohm⁻¹, $\beta = 0,0605 \cdot 10^6$ s⁻¹ ergab sich die beste Anpassung an die Beobachtungswerte.

Die Abb. 11 enthält als Kreuze eingetragen die Ergebnisse von

⁶ NUSSBAUMER, Zs. f. Phys. 78, 781 (1932) (Abb. 3 auf S. 784).

⁷ SZÉKELY, Zs. f. Phys. 78, 560 (1932).

⁸ SZÉKELY, l. c. Formeln (3) auf S. 561. Das in der obigen Arbeit verwendete ν_0 ist jedoch nicht wie in der zitierten Arbeit die zyklische, sondern die einfache Frequenz; ferner besteht der Zusammenhang $k = A \cdot Z/X$.

genau so sorgfältig ausgeführten Beobachtungen im Frequenzbereich um 7 MHz, die Heizspannung betrug 4,2 V, der Anodenstrom 15 mA. Auch in dieser Abbildung bedeutet die ausgezogene Kurve die nach den Formeln für den Schwingquarz gerechnete. Mit den Werten $k' = 51,5 \cdot 10^{-6}$ Ohm $^{-1}$, $\beta' = 0,49 \cdot 10^6$ s $^{-1}$ ist eine sehr gute Anpassung an die beobachteten L -Werte erzielt worden; weniger gut ist die an die DC -Werte, doch liegen die Abweichungen in Anbetracht der Kleinheit dieser Werte innerhalb der Fehlertoleranzen.

b) Die ungeordneten erzwungenen Schwingungen

Das Vorhandensein selbsterregter ungeordneter Schwingungen wurde von vielen Beobachtern durch Messungen mit abgestimmten Verstärkern in sehr großen Frequenzbereichen festgestellt⁹. EMELEUS¹⁰ spricht von Turbulenz im ionisierten Gas. Es ist anzunehmen, daß ungeordnete Schwingungen auch durch die Meßwechselspannungen erregt werden, und zwar besonders stark dann, wenn die Frequenz dieser Spannungen nicht allzustark von der Resonanzfrequenz abweicht. Es ist sicher berechtigt anzunehmen, daß durch eine erzwungene Turbulenz starke Mikrofelder entstehen, durch deren Einfluß die mittlere Energie der Plasmaelektronen erhöht wird, so daß der durch sie bei hohen Frequenzen bestimmte Leitwert, der der Stoßzahl dieser Elektronen verkehrt proportional ist, stark unter den Normalwert herabgesetzt wird¹¹.

In dieser Annahme scheint mir die einzige Möglichkeit zu liegen, die abnormal kleinen L -Werte, vgl. z. B. Abb. 8 im Frequenzbereich 2,5 bis 3 MHz, zu erklären. Es sei hervorgehoben, daß auch diese kleinen Meßwerte sich bei Wiederholung der Messungen sehr gut reproduzierten.

Versuch einer quantitativen Beschreibung der geordneten Schwingungen

Nach zahlreichen Angaben in der Literatur spielen die Randschichten eines Plasmas eine wichtige Rolle bei der Selbsterregung von Schwingungen. Man wird daher nicht fehlgehen, wenn man diesen Randschichten auch eine Bedeutung für die durch schwache Wechselspannungen erzwungenen Schwingungen beimißt. Da die Resonanzfrequenzen der von mir zur Erklärung der abnormalen Werte von L und DC angenommenen erzwungenen Schwingungen im Bereich um 2 MHz sehr stark durch eine Änderung der Heizung und des Anodenstroms beeinflußt werden, kann man schließen, daß die Festlegung der Resonanzfrequenz für diese Schwingungen an der kathodenseitigen Randschicht des Plasmas erfolgt. Da ferner die Resonanzfrequenz für die Schwingungen im 7 MHz-Gebiet durch die Änderung der Heizung

⁹ Vgl. d. Zitat auf S. 157.

¹⁰ EMELEUS, Proc. Phys. Soc. B **64**, 166 (1951).

¹¹ Von den vielen Arbeiten, in denen Elektronen mit übergroßer Energie beim Auftreten von Schwingungen festgestellt wurden, sei nur die neuere Arbeit ALLEN, Proc. Phys. Soc. A **68**, 696 (1955), genannt, ferner sei auf die Erklärung des Luxemburg-Effekts verwiesen; vgl. RATCLIFFE u. SHAW, Proc. Phys. Soc. A **193**, 311 (1948).

gar nicht und durch Änderungen des Anodenstroms nur wenig geändert wird, kann man die Bestimmung dieser Resonanzfrequenz in jene Randschichten verlegen, die sich mit der Heizung und dem Anodenstrom nicht stark ändern; es kommen da wohl in erster Linie die Randschichten an den Stirnflächen des hohlzylindrischen Plasmas in Betracht.

Aus dem analogen Verhalten eines Resonanzkreises mit Ionisations-Kondensator zu einem mit Schwingquarz kann wohl mit Sicherheit geschlossen werden, daß an den Resonanzstellen die eigentlichen Plasmaelektronen (Sorte ∞ von Teil 1) im gesamten Plasma in geordnete, regelmäßige, organisierte Schwingungen versetzt werden.

Man muß sich also vorstellen, daß alle Plasmaelektronen sich mit derselben Phase bewegen¹². Die sogenannte Eigenfrequenz der Plasmaelektronen, die durch die Beziehung $v_P = 1,2\pi \sqrt{n e^2 / \epsilon_0 m}$ bestimmt wird, liegt aber viel höher als die von mir beobachteten Resonanzfrequenzen, wenn man für die Elektronendichte n Werte, die mit den Messungsergebnissen von Teil 1 verträglich sind, einsetzt. Überdies steigt v_P mit der Dichte der Plasmaelektronen; demgegenüber nimmt die von mir beobachtete Resonanzfrequenz mit zunehmender Elektronendichte, zunehmendem Anodenstrom, ab. Die Resonanzfrequenz der erzwungenen geordneten Schwingungen ist sicher nicht v_P .

Ein dem Schwingquarz ähnliches Verhalten der Plasmaelektronen im elektrischen Wechselfeld kann man durch folgende Überlegung verstehen. Bei Schwingungen der Plasmaelektronen der Dichte n werden sie um eine Strecke x über den Plasmarrand verlagert, wodurch eine Oberflächenladung nex pro Flächeneinheit entsteht. Setzt man diese Ladung so wie die Polarisation eines piezoelektrischen Mediums proportional der relativen Verrückung, gleich $s_{11}(x/X)$, worin s_{11} die piezoelektrische Konstante, x die Ausdehnung des Plasmas in Feldrichtung bedeutet, so ergibt sich für die „piezoelektrische Konstante des Plasmas“

$$e_{11} = e n X \quad (I)$$

worin X die mittlere Dicke des das Plasma einschließenden Hohlzylinders bedeutet.

Nimmt man ferner an, daß die in die Randschicht hinein schwingenden Elektronen dort in ein elektrisches Feld E geraten, wodurch sie die Kraft $e n x E$ pro Flächeneinheit erfahren, so ergibt sich durch Anwendung der Beziehung, durch die in einem elastischen Medium mit dem Elastizitätsmodul s_{11} die relative Verrückung berechnet wird, $x/X \cdot s_{11}$ mal Kraft pro Flächeneinheit für den „Elastizitätsmodul des Plasmas“

$$s_{11} = \frac{1}{e n X E} \quad (II)$$

¹² BOHM u. GROSS, Phys. Rev. **75**, 1851 und 1864 (1949) und Phys. Rev. **79**, 1992 (1950), sprechen von medium-like behaviour. Vgl. dazu auch BOHM u. PINES, Phys. Rev. **82**, 625 (1951); Phys. Rev. **85**, 388 (1952); Phys. Rev. **92**, 609 (1953).

Setzt man ferner die für den Piezomodul d_{11} geltende Beziehung an: $d_{11} = e_{11} \cdot s_{11}$, so gewinnt man den „Piezomodul des Plasmas“.

$$d_{11} = \frac{1}{E} \quad (\text{III})$$

Ich nehme weiter an, daß die einen dickwandigen Hohlzylinder der Länge l bildenden Plasmaelektronen sich wie ein elastischer Stab dieser Länge verhalten, so daß sich die elastische Grundfrequenz durch die folgende Formel ergibt.

$$\nu_0 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{1}{\mu s_{11}}} \quad (\text{IV})$$

Setzt man darin für s_{11} den durch die Formel II gegebenen Ausdruck ein und berechnet die Dichte μ (Masse der Volumeneinheit) zu nm (m die Masse eines Elektrons), so erhält man

$$\nu_0 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{e X E}{m}} \quad (\text{IV})$$

Man kann nun die in den Formeln für den Quarzresonator vorkommende Konstante

$$k = \frac{4 d_{11}^2}{\pi s_{11} \sqrt{\mu s_{11}}} \cdot \frac{Z}{X}$$

(Z die Ausdehnung des Quarzstabes normal zum Feld und zur Stabachse) für das Plasma unter den obigen Annahmen berechnen; für Z wird man wohl in erster Näherung den mittleren Umfang des Plasma-Hohlzylinders u einsetzen dürfen und erhält dann

$$k = \frac{4 e \sqrt{e} \sqrt{X} u}{\pi \sqrt{m E}} \cdot n \quad (\text{V})$$

Die zweite Konstante β in den Formeln für den Quarzresonator, die für die Dämpfung der Schwingungen charakteristisch ist, wollen wir auch für das Plasma proportional ν_0^2 setzen:

$$\beta = \alpha \nu_0^2 \quad (\text{VI})$$

Es ist bemerkenswert, daß die stark schematisierte durch die Formeln I bis VI dargestellte Überlegung die Beobachtungen über die erzwungenen Plasma-Schwingungen quantitativ richtig zu beschreiben erlaubt. Dabei nehme ich an, daß im 2 MHz-Gebiet die durch das Feld E_k in der kathodenseitige Randschicht sich ergebende Grundfrequenz angeregt wird, während im 7 MHz-Gebiet die durch das Feld E_s in der Randschicht an den Stirnflächen sich ergebende erste harmonische Oberschwingung entsteht, also

$$\nu_0 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{e X E_k}{m}} \quad \text{und} \quad \nu_0' = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{e X E_s}{m}} \quad (\text{VII})$$

Aus diesen Formeln kann man E_k , bzw. E_s berechnen. Man erhält mit $X = 18,5 \cdot 10^{-4}$ m, $l = 2,1 \cdot 10^{-2}$ m aus $v_0 = 2,17$ MHz bei 7 mA Anodenstrom und 4,0 V Heizung $E_k = 25,5$ V/m und aus $v_0' = 7$ MHz bei 15 mA Anodenstrom und 4,2 V Heizung $E_s = 66$ V/m.

Die Formel V für k , dessen Betrag aus den Beobachtungen entnommen wird, liefert, wenn man die aus der Resonanzfrequenz berechneten E -Werte einsetzt, die Dichte n der Plasmaelektronen. Man findet mit $u = 1,62 \cdot 10^{-2}$ m im ersten Fall (7 mA, $k = 32,4 \cdot 10^{-6}$ Ohm $^{-1}$ bei 4,0 Volt Heizung) $n = 2,7 \cdot 10^{12}$ m $^{-3}$, im zweiten Fall (15 mA, $k' = 43 \cdot 10^{-6}$ Ohm $^{-1}$, bei derselben Heizung ermittelt) $n = 5,9 \cdot 10^{13}$ m $^{-3}$. Diese Werte stehen in sehr guter Übereinstimmung mit der Abschätzung dieser Dichten im Teil 1, wo für 10 mA eine Dichte der Plasmaelektronen

größer als $2,1 \cdot 10^{12}$ m $^{-3}$ und Proportionalität mit dem Anodenstrom erschlossen wurde.

Eine weitere Stütze für die Überlegungen gewinnt man, wenn man den gerechneten Maximalwert des Leitwertes an der Resonanzstelle mit dem beobachteten vergleicht. Man rechnet aus Formel A für $v = v_0$

$$\begin{aligned} L_{\max} &= \frac{k v_0}{\beta} = \frac{4 e^2 X u n}{\pi m \cdot 2 l \beta} = \\ &= \frac{2 e^2 u X n}{\pi m l \alpha v_0^2} \end{aligned}$$

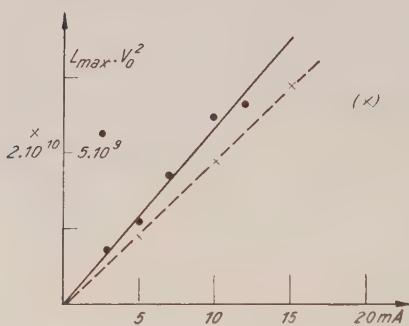
Abb. 12. Zur Prüfung der Annahme, daß sich das Plasma wie ein piezoelektrischer elastischer Körper verhält

woraus

$$L_{\max} \cdot v_0^2 = \frac{2 e^2 u X}{\pi m l \alpha} \cdot n$$

folgt. In Abb. 12 sind die aus einigen Beobachtungen im 2 MHz-Gebiet bei möglichst gleicher Heizung gewonnenen Werte von $L_{\max} \cdot v_0^2$ als Funktion vom Anodenstrom aufgetragen (Punkte), sie liegen auf der Geraden a , bestätigen also die obige Folgerung der Proportionalität des Produktes mit der Dichte n , da ja n dem Anodenstrom proportional ist. Auch die Beobachtungswerte, die als Kreuze eingezeichnet sind, im 7 MHz-Gebiet — in der obigen Formel steht dann im Nenner statt 1 der halbe Wert — liegen auf einer Geraden, der Geraden b .

Aus den Experimenten kann noch eine interessante Folgerung über die Abhängigkeit der für die erzwungenen Schwingungen bedeutungs vollen Feldstärke E an den Randschichten des Plasmas gewonnen werden. Man wird wohl annehmen dürfen, daß E der an den Randschichten liegenden Spannung, der Schichtspannung U_s proportional ist. An der kathodenseitigen Randschichte ist diese gleich der Potential-



differenz zwischen Plasma und Gitter + Kathode, also wie im Teil 1 erschlossen wurde, um 8,7 Volt höher als die Brennspannung U_a . Ein kleiner Bruchteil von U_s , wir wollen ihn $\xi \cdot U_s$ nennen, fällt offenbar ganz nahe am Plasmarand gleichmäßig ab, da man sich den Potentialverlauf etwa so, wie es Abb. 13 zeigt, vorstellen kann. In der Schichte δ (die vielleicht nach einem sehr schmalen Übergangsgebiet an das Plasma anschließt) ist der Potentialverlauf linear, E also konstant, es gilt $\xi \cdot U_s = \delta \cdot E$ oder U_s/E und daher wegen Formel IV auch U_s/v_0^2 proportional δ . In der Abb. 14 ist gezeigt, wie dieser Quotient von der Brennspannung U_a abhängt: Gerade a gilt für die Messungen im 2 MHz-Gebiet. Diese Gerade schneidet bei 30 Volt die Abszissenachse, was man so deuten kann, daß erst ab 30 Volt Brennspannung die Ausbildung einer δ -Schichte mit dem in Abb. 13 angedeuteten Potentialverlauf erfolgt und daß die Dicke δ proportional $U_a - 30$ anwächst.

Über die Schichtspannung U'_s an den Stirnflächen des Plasmas kann man keine sichere Aussage machen. Ich habe daher versucht $U'_s = U_P - U_0$ zu setzen (U_P = Plasmapotential) und U_0 so zu bestimmen, daß U'_s ebenfalls proportional $U_a - 30$ ist, was mit dem Wert $U_0 = 34,1$ Volt, also $U'_s = U_a - 25,4$ überraschend gut gelingt: Gerade b für den Bereich um 7 MHz.

Es soll zum Schluß noch darauf hingewiesen werden, daß erzwungene geordnete Schwingungen nicht für alle Anodenströme beobachtbar sind, und zwar im 2 MHz-Gebiet nicht für Anodenströme oberhalb 15 mA und im 7 MHz-Gebiet erst ab 5 mA; ferner befolgen die in diesem Gebiet bei 20 mA beobachteten Resonanzschwingungen nicht das in Abb. 12 dargestellte Gesetz, vgl. den eingeklammerten Wert auf dieser Abbildung für 20 mA. Man kann das vielleicht folgendermaßen erklären: Bei etwa 20 mA erfolgt eine Umbildung der ganzen Entladung, die Dämpfung der Schwingungen wird stark erhöht; ferner wird wahrscheinlich die Randschichte an den Stirnflächen unterhalb von 5 mA noch nicht nach demselben Gesetz aufgebaut wie bei höheren Anodenströmen.

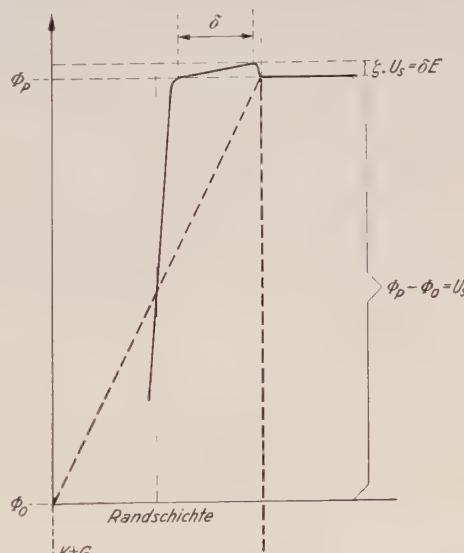


Abb. 13. Vermuteter Potentialverlauf in einer Plasmarandschichte

Schlußbemerkung

Die vorliegende Arbeit zeigt, daß mit schwachen hochfrequenten Wechselfeldern ausgeführte Messungen des Leitwertes und der Kapazität eines mit ionisiertem Gas gefüllten Kondensators wichtige Beiträge zur schwierigen Frage der Schwingungen in einem solchen Gas liefern. Denn durch die Meßspannungen werden in bestimmten Frequenzgebieten erzwungene Schwingungen erregt, die nicht die Instabilität der in den gleichen Frequenzgebieten zu beobachtenden selbsterregten Schwingungen besitzen. Man hat zwischen geordneten und ungeordneten erzwungenen Schwingungen zu unterscheiden. Die geordneten gehorchen denselben Gesetzen wie die eines Schwingquarzes. Es kann eine auch quantitativ befriedigende Analogie durchgeführt werden, wenn man das elektrische Feld in den Plasmarandschichten als bestimend für Piezo- und Elastizitätsmodul des Plasmas ansieht.

Ältere Beobachtungen¹³ erfahren durch die neuen Erkenntnisse eine zwanglose Erklärung: Die Frequenz-Abhängigkeit des Leitwertes eines Ionisationskondensators (Plattenkondensator, Plattengröße $1 \times Z = 3 \times 1,5$ cm, Plattenentfernung $X = 0,75$ cm) in Argon von 10^{-3} mm

Abb. 14. Abhängigkeit der Dicke der E-Schichte von der Anodenspannung. a) Schichtspannung $U_s = U_a + 8,7$, b) Schichtspannung $U_s' = U_a + 25,4$

Druck, das durch einen Elektronenstrahl ionisiert wurde, zeigte um 40 MHz eine Resonanzstelle, die man in gleicher Weise deuten kann wie die Resonanzen, über die in der vorliegenden Arbeit berichtet wurde. Es seien die Daten für eine der älteren Resonanzkurven (Abb. 7 auf S. 299 der zitierten Arbeit) hier angeführt: für $v = 37,3$ MHz betrug $L_{\max} = 400 \cdot 10^{-6}$ Ohm $^{-1}$, der leicht zu erschließende Normalwert ohne Schwingungen müßte $76 \cdot 10^{-6}$ Ohm $^{-1}$ betragen. Die Frequenzkurve kann durch die L-Formel (Λ) für den Quarzresonator dargestellt werden mit $k = 48,5 \cdot 10^{-6}$ Ohm $^{-1}$, $\beta = 4,54 \cdot 10^6$ s $^{-1}$. Aus Formel IV rechnet man für die elektrische Feldstärke in der Randschicht — offenbar an den Kondensatorplatten — $E = 3800$ V/m und mittels Formel V ergibt sich die Dichte der geordnet schwingenden Plasmaelektronen zu $25,5 \cdot 10^{12}$ m $^{-3}$, ein sehr glaubwürdiger Wert. Die in der Abb. 8 der älteren Arbeit zu sehende Änderung der Resonanzfrequenz bei Änderung

¹³ SZÉKELY, Ann. d. Phys. (5) **20**, 279 (1934).

der Beschaffenheit des Elektronenstrahls findet nun eine einfache Erklärung, da gleichzeitig mit den Eigenschaften des Elektronenstrahls sich der Wert der Feldstärke E in der Randschicht ändert.

Zur Durchführung dieser Arbeit stellte Herr Prof. Dr. A. SMEKAL die Hilfsmittel des Physikalischen Institutes der Universität Graz zur Verfügung, wofür ihm auch an dieser Stelle herzlicher Dank gesagt sei.

Ein Wellenleiter für Oberflächenwellen von Flüssigkeiten*

Von

Othmar Preining

I. Physikalisches Institut der Universität Wien

Mit 13 Abbildungen

(Eingegangen am 1. April 1958)

Zusammenfassung

Wie für elektromagnetische Wellen kann man für Oberflächenwellen von Flüssigkeiten Wellenleiter herstellen. Für eine ideale Flüssigkeit mit verschwindender äußerer Reibung läßt sich eine relativ einfache Theorie angeben. Sie ergibt, daß die Bahnen der infinitesimalen Flüssigkeitsteilchen stets Ellipsen sind. Die Oberfläche der Flüssigkeit im Medium zeigt periodische Erhebungen und Vertiefungen, deren Schichtenliniendarstellung dem typischen Bild der Feldverteilung in elektromagnetischen Hohlleitern sehr ähnlich ist. Die Theorie stimmt mit den Experimenten — verglichen werden die berechneten und die gemessenen Brechungsverhältnisse von Wellenleiterprismen — nicht sehr gut überein, die Abweichungen sind jedoch plausibel.

In den vergangenen 15 Jahren hat mit der Entwicklung der Radar-Technik die Physik der elektromagnetischen Hohlräumleiter, Wellenleiter und künstlichen Medien einen großen Aufschwung genommen. Zahlreiche Arbeiten behandeln die Wechselwirkung kurzer elektromagnetischer Wellen (Wellenlänge etwa 1 bis 50 cm) mit Körpern gleicher Größe. Wesentlich für die Erscheinungen ist das Verhältnis der Lineardimensionen wie Rohrdurchmesser, Plattenabstand oder Lochgröße zur Wellenlänge. Von diesem Verhältnis hängt die Änderung der Phasengeschwindigkeit im Wellenleiter oder künstlichem Medium ab. Speziell in einem Plattenmedium oder einem Hohlleiter ist sie immer größer oder gleich der außerhalb. Der praktischen Bedeutung wegen hat man bisher meist das Verhalten elektromagnetischer Wellen untersucht. Nun kann man ebenso wie für diese auch für Wellen an der Oberfläche einer Flüssigkeit Wellenleiter herstellen.

* Herrn Professor Dr. VICTOR F. HESS zum 75. Geburtstag gewidmet. — Teilweise vorgetragen auf der Herbsttagung 1957 der Österreichischen Physikalischen Gesellschaft.

Ein Plattenmedium für Oberflächenwellen

Um die größere Phasengeschwindigkeit der Wellen im Wellenleiter nachzuweisen, wurde ein Wellenleiterprisma gebaut. Es besteht aus senkrecht zur Wasseroberfläche stehenden Blechstreifen verschiedener

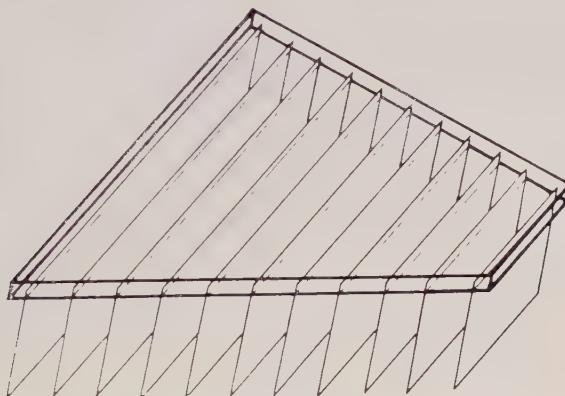


Abb. 1. Wellenleiterprisma für Wasserwellen. Streifenbreite 30 mm, Blechstärke 0,5 mm, brechender Winkel des Prismas 40° , Kanalbreite 9,5 mm

Länge, entspricht also einem Plattenmedium. In eine Plexiglasplatte von 5 mm Dicke wurden 0,5 mm breite Nuten 3 mm tief eingeschnitten und in diese entsprechende Streifen aus Messingfederblech gesteckt. Das so konstruierte Wellenleiterprisma zeigt Abb. 1. Jeder „Kanal“ zwischen zwei Blechstreifen ist ein Hohlleiter. Da, wie gesagt, die Phasengeschwindigkeit im Hohlleiter, C , größer als c , der normalen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Oberflächenwellen ist und das Prisma aus einzelnen verschiedenen langen Kanälen besteht, tritt Brechung ein. Zum Nachweis des Effekts wurden solche Wellenleiterprismen in der bekannten Anordnung Wellenwanne—Wellenerreger [1], wie sie für Demonstrationszwecke vielfach benutzt wird, verwendet.

Die Erscheinungen wurden mit einer modifizierten Schlierenanordnung, deren Schema in Abb. 2 zu sehen ist, photographiert. Von der punktförmigen Lichtquelle Q einer Reuterlampe, die in der Brennebene der großen Linse L (43 cm Durchmesser, 1 m Brennweite) steht, wird der Spiegel $S\beta$ in der Wellenwanne W beleuchtet. Das Licht wird

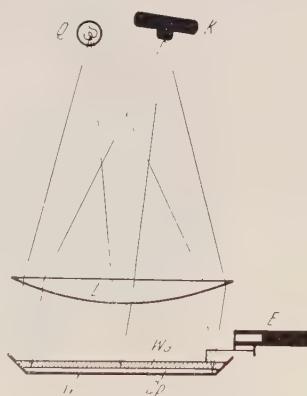


Abb. 2. Anordnung zum Photographieren der Wasserwellen, schematisch, Q Lichtquelle (6 V, 5 A), L Linse, W Wellenwanne, $S\beta$ Spiegel, W Wasserschichte, E Wellenerreger, K Kamera (Objektiv $f = 5$ cm, $1:2,8$, Einstellung auf ∞ , Belichtungszeit 1/500 sec)

reflektiert und es entsteht im Objektiv der Kamera K , die sich ebenfalls in der Brennebene von L befindet, ein Bild von Q . Erregt man nun mittels des Erregers E Wellen an der Oberfläche der Wasserschicht Wa ,

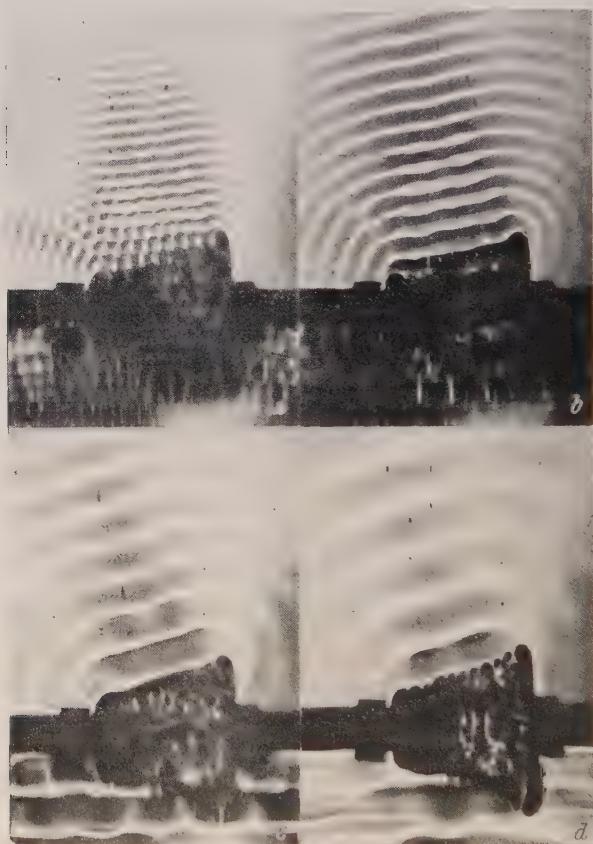


Abb. 3 a. Gleichschenkeliges Prisma, brechender Winkel 40° , Kanalbreite 9,5 mm, Wassertiefe 7,8 mm, vier Aufnahmen gleicher Vergrößerung mit den Wellenlängen 18,5 mm, 29,6 mm, 48,4 mm, 63,2 mm.

so bilden die Flanken der Wellen mit der Wasseroberfläche kleine Wasserprismen, die das Licht so ablenken, daß es nicht mehr in die Kamera gelangt. Als Schlierenblende wirkt also die Fassung des Kameraobjektivs. Man erhält auf dem photographischen Negativ eine hell-dunkel Struktur, wobei die dunklen Stellen den Maxima und Minima, die hellen Stellen den Flanken der Wellen entsprechen; der Abstand zweier heller oder dunkler Streifen ist demnach $\lambda/2$. Die Abb. 3 und 4 zeigen die Brechung von Wellen verschiedener Wellenlänge in einem gleichschenkeligen und einem rechtwinkeligen Wellenleiterprisma. Die Lage der Prismen in der Wellenwanne ist in den Abb. 3 b und 4 b maß-

stabgetreu angegeben, E ist der Erreger und B sind Blenden, auch der Bildausschnitt ist jeweils eingezeichnet. Man sieht aus den Photographien, daß das Brechungsverhältnis oder vielmehr die Phasengeschwindigkeit eine Funktion der Wellenlänge sein muß, und zwar wird n bzw. C umso größer, je größer λ wird.

Man kann die Änderung der Ausbreitungsgeschwindigkeit in einem Hohlleiter auch ohne Prisma studieren. Abb. 5 zeigt Planwellen, die in einem einzelnen Kanal einlaufen (der Kanal wurde aus zwei Blechstreifen der Größe 240×20 mm, 3 mm Dicke gebildet; seine Breite konnte mittels Distanzstücke eingestellt werden). Man sieht, daß die Wellenlänge im Kanal größer ist als außerhalb. Aus solchen Aufnahmen läßt sich die Änderung der Phasengeschwindigkeit beim Eintreten in den Kanal durch direktes Ausmessen bestimmen. Bei den Prismen gelingt die Auswertung durch Messung der Drehung der Wellenfront, dabei

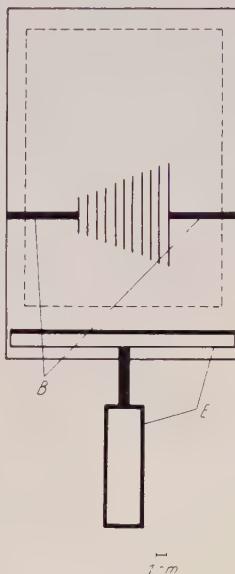


Abb. 3 b. Anordnung des Prismas der Abb. 3 a in der Wellenwanne, maßstabgetreu

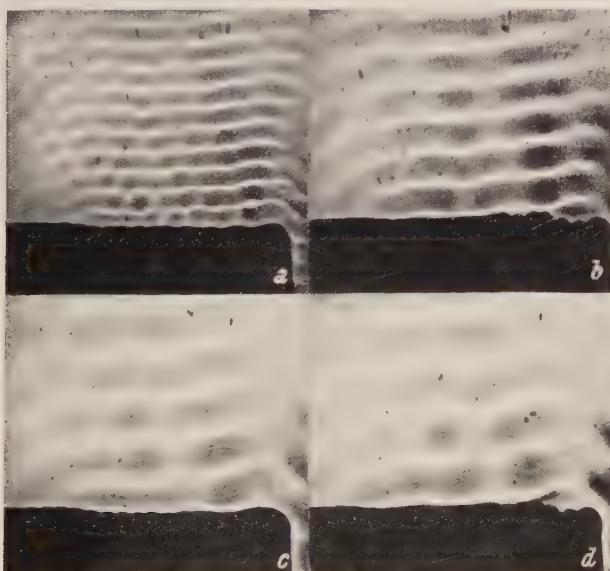


Abb. 4 a. Rechtwinkeliges Prisma, brechender Winkel 24° , Kanalbreite 9,5 mm, Wassertiefe 8,0 mm, vier Aufnahmen gleicher Vergrößerung mit den Wellenlängen 25,2 mm, 42,0 mm, 51,0 mm, 57,6 mm

ist zu beachten, daß eine Brechung nur an der dem Erreger abgewandten Seite des Prismas auftreten kann, da im Prisma die einzelnen Kanäle streng getrennt sind und in jedem die Fortpflanzungsrichtung notwendig die Kanalrichtung ist. Die experimentell bestimmten Werte des Brechungsverhältnisses sind in Abb. 13 angegeben.

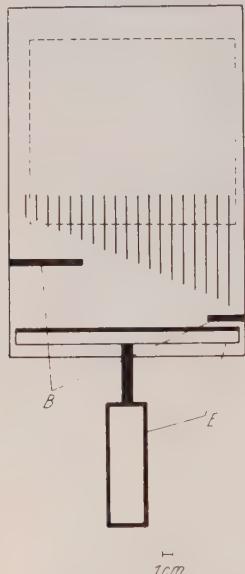


Abb. 4 b. Anordnung des Prismas der Abb. 4 a
in der Wellenwanne, maßstabgetreu

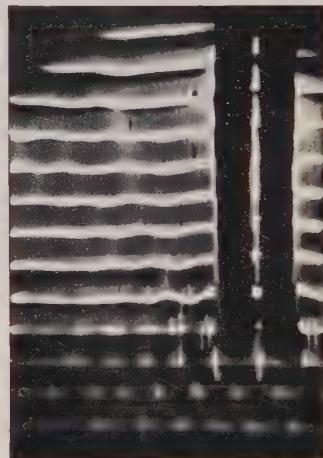


Abb. 5. Einzelkanal, Kanalbreite 25 mm, Wassertiefe 7,9 mm, Wellenlänge 21,3 mm

Theorie der Oberflächenwellen

Vorausgesetzt werde eine ideale Flüssigkeit, das heißt die innere und die äußere Reibung verschwinde (Gleitung an allen Berandungen) und die Flüssigkeit sei inkompressibel.

Ferner sei die Bewegung der Flüssigkeit wirbelfrei, es existiere also ein Geschwindigkeitspotential.

Außerdem sei vorausgesetzt, daß die Amplitude der Welle klein gegen die Wellenlänge und die Gestalt der Welle sinusförmig sei. Es finde kein Materietransport statt. Die Bahnen infinitesimaler Flüssigkeitsteilchen seien also notwendig geschlossene Kurven, die periodisch durchlaufen werden.

Unter diesen Voraussetzungen erhält man nach Lösung der EULER-schen Gleichung das Geschwindigkeitspotential [2]

$$\phi = A \cosh \left(2\pi \frac{z}{\lambda} \right) \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - vt \right) \quad (1)$$

Dabei ist A die Amplitude, ferner λ die Wellenlänge, v die Frequenz, x die Koordinate in Fortpflanzungsrichtung und z die Höhenkoordinate.

Die Bahn eines infinitesimalen Flüssigkeitsteilchens ist dann eine Ellipse in einer vertikalen Ebene, wobei die Größe der Achsen vom Abstand vom Boden des Gefäßes abhängt. Am Boden entartet die Ellipse zur Strecke. Dieses Ergebnis erhält man auf folgende Weise. Der Ort, an dem sich ein infinitesimales Flüssigkeitsteilchen zur Zeit t befindet, kann unter den oben gemachten Voraussetzungen in erster Näherung durch eine einfache Integration berechnet werden. Bezeichnet man mit x_0, z_0 den Punkt, um den sich ein infinitesimales Flüssigkeitsteilchen auf seiner geschlossenen Bahn herumbewegt, so kann man die Lage des Teilchens zur Zeit t ausdrücken

$$x = x_0 + \xi$$

$$z = z_0 + \zeta$$

wobei ξ und ζ Orts- und Zeitfunktionen sind, die wie die Amplitude klein gegen die Wellenlänge sind, so daß man ihre Produkte gegen A/λ vernachlässigen darf. Dann ergibt sich, wenn man wieder x und z für x_0 und z_0 schreibt

$$\xi = x - x_0 = \int_0^t (v_x)_{x_0 z_0} dt = -\frac{A}{c} \cosh\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right) \quad (2)$$

$$\zeta = z - z_0 = \int_0^t (v_z)_{x_0 z_0} dt = \frac{A}{c} \sinh\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right)$$

wobei

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{und} \quad c = \lambda \nu$$

bedeutet.

Die Gleichung der Teilchenbahn ist dann

$$\left[\frac{A}{c} \cosh\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) \right]^2 + \left[\frac{A}{c} \sinh\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) \right]^2 = 1 \quad (3)$$

eine Ellipse mit den Halbachsen

$$a = \frac{A}{c} \cosh\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) \quad (4)$$

$$b = \frac{A}{c} \sinh\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right)$$

Da nach Definition von ϕ

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{dz}{dt}$$

und da

$$\frac{\partial z}{\partial t}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial x}{\partial t} \quad \text{proportional} \quad \frac{A}{\lambda} \ll 1$$

sind, kann man in erster Näherung

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial t} \quad (5)$$

setzen; daraus folgt, daß man auch z durch eine einfache Integration von v_z nach t bestimmen kann. Nach entsprechendem Einsetzen und nach Ermittlung der Konstanten ergibt sich die Oberflächengestalt der Flüssigkeit zu

$$z = h + \frac{A}{c} \sinh \left(2\pi \frac{h}{\lambda} \right) \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - v t \right) \quad (6)$$

Die Abb. 6 zeigt die Oberflächengestalt der Flüssigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt.

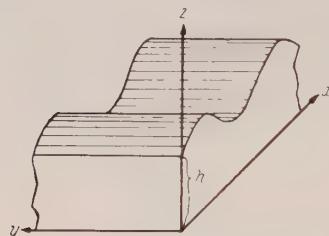


Abb. 6. „Ebene“-Oberflächenwelle zu einem bestimmten Zeitpunkt

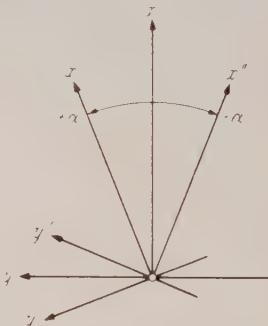


Abb. 7. Lage der Koordinatensysteme in denen ϕ' und ϕ'' die Gestalt der Gl. 1 haben

Theorie des Plattenmediums

In einem Plattenmedium (Plattenabstand = a) wird das Geschwindigkeitspotential für die Randbedingung

$$v_n = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (7)$$

an allen festen Wänden gesucht.

Die Lösung (1) ist bereits eine Lösung für das Plattenmedium, da die Randbedingung erfüllt ist. Diese Form der Lösung tritt z. B. dann auf, wenn ein Planwellenerreger direkt in einem Kanal steht [3]. Es gibt aber noch eine weitere Lösung. Man erhält sie analog zum elektromagnetischen Fall [4], wenn man zwei Planwellensysteme mit ihren Wellennormalen um die Winkel $+\alpha$ und $-\alpha$ gegen die x -Achse geneigt gegeneinander laufen läßt. Abb. 7 zeigt die Lage der Koordinatensysteme, in denen die beiden Planwellensysteme die Gestalt (1) haben. Die Geschwindigkeitspotentiale in diesen Systemen sind:

$$\begin{aligned} \phi' &= \frac{A}{2} \cosh \left(2\pi \frac{z'}{\lambda} \right) \sin 2\pi \left(\frac{x'}{\lambda} - v t \right) \\ \phi'' &= \frac{A}{2} \cosh \left(2\pi \frac{z''}{\lambda} \right) \sin 2\pi \left(\frac{x''}{\lambda} - v t \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Die Größe der Amplitude ist mit $A/2$ angenommen, damit der Energieinhalt der Lösung für das Plattenmedium mit dem der Lösung (1) übereinstimmt. Nun wird in das x,y,z -System durch folgende einfache Drehungen transformiert.

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha & x'' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \\z' &= z & z'' &= z\end{aligned}\quad (9)$$

Es ist das Gesamtpotential gleich der Summe der Einzelpotentiale, also

$$\phi = \phi' + \phi'' = A \cosh \left(2\pi \frac{z}{\lambda} \right) \cos \left(2\pi \frac{y \sin \alpha}{\lambda} \right) \sin 2\pi \left(\frac{x \cos \alpha}{\lambda} - v t \right) \quad (10)$$

Die Randbedingung am Boden

$$v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{für} \quad z = 0 \quad (11)$$

ist erfüllt. Die Randbedingung an den Wänden ergibt:

$$v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{für} \quad y = 0, \pm a, \pm 2a, \dots \quad (12)$$

also auch

$$\sin \left(2\pi \frac{a \sin \alpha}{\lambda} \right) = 0 \quad \text{oder} \quad \sin \alpha = \frac{\lambda}{2a} \quad \text{für die Grundwelle} \quad (13)$$

Mit der Abkürzung

$$A = \frac{\lambda}{\cos \alpha} \quad (14)$$

für die Wellenlänge λ im Plattenmedium erhält man dann

$$\phi = A \cosh \left(2\pi \frac{z}{\lambda} \right) \cos \left(\pi \frac{y}{a} \right) \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - v t \right) \quad (15)$$

Für die Phasengeschwindigkeit im Plattenmedium kann man schreiben

$$C = c/\cos \alpha \quad (16)$$

ein Ausdruck, der noch später benötigt wird.

Die Oberflächengestalt im Plattenmedium

Wieder ergibt sich aus ϕ durch Differentiation nach z und Integration nach t die Oberflächengestalt unter den oben gemachten Voraussetzungen, speziell der, daß die Amplitude A sehr klein ist, zu

$$z = h - \frac{A}{c} \sinh \left(2\pi \frac{h}{\lambda} \right) \cos \left(\pi \frac{y}{a} \right) \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - v t \right) \quad (17)$$

Mit den Abkürzungen

$$\tilde{z} = \frac{z - h}{\frac{A}{c} \sinh \left(2\pi \frac{h}{\lambda} \right)} ; \quad \tilde{y} = \frac{y}{a} ; \quad \tilde{x} = \frac{x}{\lambda} \quad (18)$$

erhält man dann statt (17)

$$\bar{z} = \cos(\pi \bar{y}) \cos(2\pi \bar{x}) \quad (19)$$

Die Einführung der Größen $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ erlaubt die Darstellung der Oberfläche der Flüssigkeit im Plattenmedium unabhängig von Wellenlänge und Amplitude der ankommenden Welle, vom Plattenabstand und von der Wassertiefe. In Abb. 8 ist die Flüssigkeitsoberfläche im Plattenmedium zur Zeit $t = 0$ in Schichtenliniendarstellung gegeben. Die Erhebungen und Vertiefungen wandern in der \bar{x} -Richtung mit der Geschwindigkeit C ; die Erscheinung hat in der \bar{x} -Richtung den Charakter einer fortschreitenden, in der \bar{y} -Richtung den einer stehenden Welle.

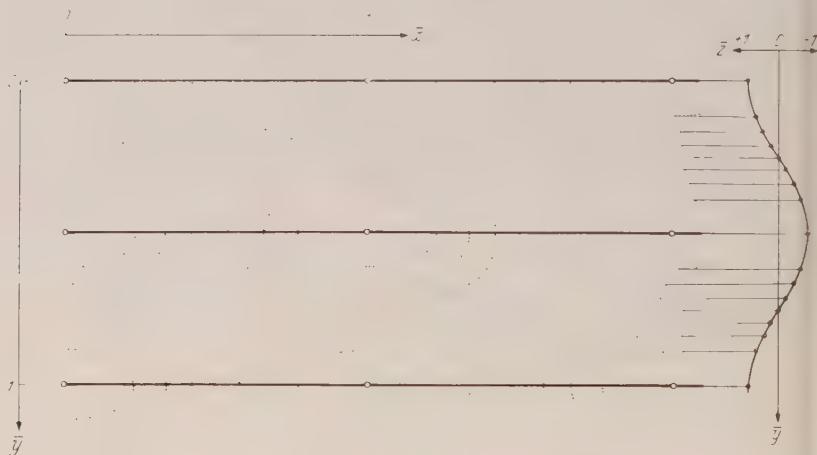


Abb. 8. Schichtenliniendarstellung der Wasseroberfläche im Plattenmedium. Abstand der Schichtenlinien das 0,25fache der maximalen Erhebung der Welle über die ungestörte Oberfläche

Es fällt auf, daß sich die Schichtenlinien durch die Platten hindurch fortsetzen, so als ob diese nicht vorhanden wären. Dies ist auf die Art, wie die Lösung konstruiert wurde, zurückzuführen. In Wirklichkeit ist wohl eine solche Fortsetzung der Schichtenlinien durch die Platten nicht vorhanden. Die Oberflächengestalt in den einzelnen Kanälen wird voneinander unabhängig sein, dies umso mehr dann, wenn die Einzelkanäle nicht gleichzeitig von einem anlaufenden Wellenkamm getroffen werden (wie dies z. B. bei Anordnungen, wie sie die Abb. 3 a und 4 a zeigen der Fall ist).

Betrachtet man einen Einzelkanal in Abb. 8, so sieht man, daß die Oberflächengestalt bezüglich der Kanalachse unsymmetrisch ist und zwar entspricht in der \bar{y} -Richtung einem Wellenberg in einer Kanalhälfte einem Tal in der anderen und umgekehrt. Es muß also in einem Übergangsgebiet der anlaufende parallele Kamm in ein Berg und ein Tal oder umgekehrt zerfallen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist in

beiden Fällen — ob links Berg und rechts Tal oder rechts Berg und links Tal — gleich. Die Verhältnisse im Kanal entsprechen einander mit einer Phasenverschiebung von $\lambda/2$. Welche der beiden Formen entstehen, hängt wahrscheinlich von lokalen Unsymmetrien ab. Bei einem Plattenmedium, speziell einem Wellenleiterprisma, muß man also die einzelnen Kanäle als voneinander unabhängig ansehen. Dies zeigt auch Abb. 9, in ihr kann man die Lage der Kämme in einem Wellenleiterprisma erkennen.



Abb. 9. Lage der „Kämme“ (Berg-Tal) in den Einzelkanälen eines Wellenleiterprismas. Aus einer Aufnahme wie zu Abb. 4 a, das Prisma stark vergrößert. Die Wellenfronten, die etwa parallel zur Prismenvorderkante (7) in Pfeilrichtung anlaufen, erscheinen im Prisma geneigt (2, 3), die Bleche (4) sind undeutlich zu erkennen, ebenso die Blenden (5) und ihre Halterungen. Auch die Halterungen (6) für die Blechstreifen des Prismas sind zu erkennen. Die Prismenvorderkante und vor allem die Prismenhinterkante erscheinen nicht als gerade. Dies ist auf das Zusammenwirken von Adhäsion und Welle bei der Krümmung der Wasseroberfläche zurückzuführen. Durch die Krümmung, die durch Adhäsion hervorgerufen wird, erscheinen ins Wasser tauchende Gegenstände im Bild vergrößert. Ecken abgerundet usw.

Die Teilchenbahnen im Plattenmedium

Die Bahnen infinitesimaler Flüssigkeitsteilchen erhält man wieder durch zeitliche Integration der Geschwindigkeitskomponenten unter den oben genannten Voraussetzungen. In einem Koordinatensystem ξ, η, ζ parallel zum x, y, z System durch den Aufpunkt x_0, y_0, z_0 — dem Punkt, um den sich ein infinitesimales Flüssigkeitsteilchen herumbewegt — erhält man für die Teilchenbahnen, wenn man wieder x, y, z für x_0, y_0, z_0 schreibt

$$\begin{aligned} \xi &= x - x_0 = A^* \sin \psi \quad \text{mit} \quad A^* = 2\pi \cos \alpha \frac{A}{c} \cosh \left(2\pi \frac{z}{\lambda} \right) \cos \left(\pi \frac{y}{a} \right) \\ \eta &= y - y_0 = B^* \cos \psi \quad \text{mit} \quad B^* = \frac{\lambda}{2a} \frac{A}{c} \cosh \left(2\pi \frac{z}{\lambda} \right) \sin \left(\pi \frac{y}{a} \right) \\ \zeta &= z - z_0 = C^* \cos \psi \quad \text{mit} \quad C^* = \frac{A}{c} \sinh \left(2\pi \frac{z}{\lambda} \right) \cos \left(\pi \frac{y}{a} \right) \\ &\quad \text{und} \quad \psi = 2\pi \left(\frac{x}{A} - v t \right) \end{aligned} \quad (20)$$

Eine Drehung des ξ, η, ζ -Systems und die ξ -Achse um den Winkel φ ergibt:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi' & = A^* \sin \psi \\ \eta &= \eta' \cos \varphi - \zeta' \sin \varphi = B^* \cos \psi \\ \zeta &= \eta' \sin \varphi + \zeta' \cos \varphi = C^* \cos \psi\end{aligned}\quad (21)$$

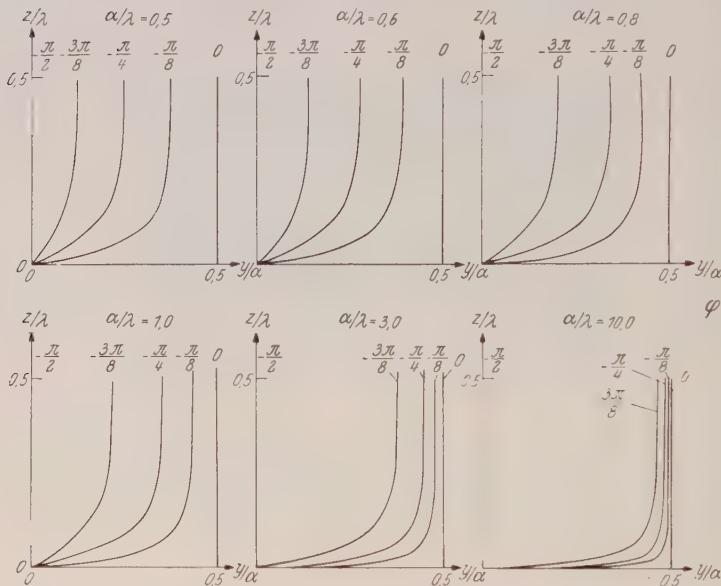


Abb. 10. Abhängigkeit des Winkels φ , der die Lage der Bahnebene eines infinitesimalen Flüssigkeitsteilchens beschreibt, von y/a und z/λ mit α/λ als Parameter in Schichtenliniendarstellung

wobei die ξ' η' ζ' die neuen Koordinaten sind. Aufgelöst nach η' und ζ' ergeben die beiden letzten Gleichungen

$$\begin{aligned}\eta' &= \cos \psi [B^* \cos \varphi + C^* \sin \varphi] \\ \zeta' &= \cos \psi [-B^* \sin \varphi + C^* \cos \varphi]\end{aligned}\quad (22)$$

Es werde φ so gewählt, daß

$$-B^* \sin \varphi + C^* \cos \varphi = 0 \quad (23)$$

ist. Somit ergibt sich für φ

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{C^*}{B^*} \quad (24)$$

Bezeichnet man

$$A^* = -\bar{A} \quad B^* \cos \varphi + C^* \sin \varphi = -\bar{B} \quad (25)$$

so erhält man als Bahngleichung

$$\begin{aligned}\xi' &= -\bar{A} \sin \psi \\ \eta' &= -\bar{B} \cos \psi \\ \zeta' &= 0\end{aligned}\quad (26)$$

also eine Ellipse mit den Achsen \bar{A} und \bar{B} .

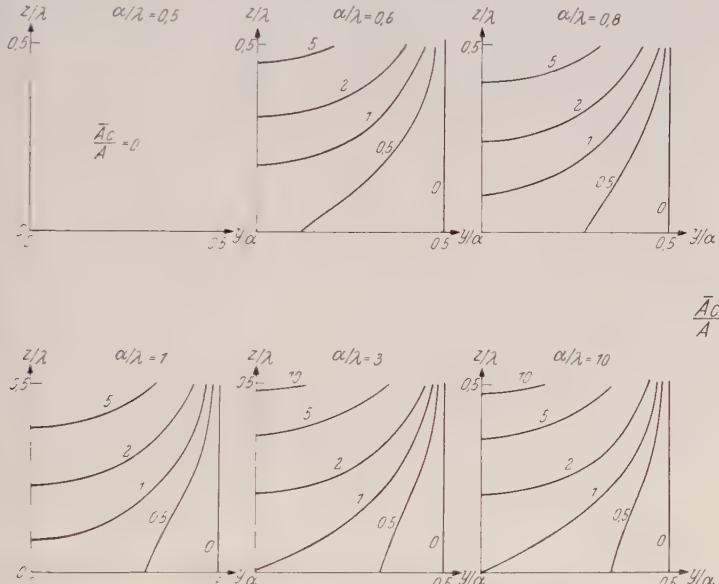


Abb. 11. Abhängigkeit von $\bar{A} c/A$, einem Wert, der die Größe der einen Halbachse einer Bahnellipse eines infinitesimalen Flüssigkeitsteilchens bestimmt von y/λ und z/λ mit a/λ als Parameter in Schichtenliniendarstellung

Nach Resubstitution lassen sich φ , \bar{A} und \bar{B} als Funktionen der reduzierten Parameter a/λ , z/λ und y/λ darstellen. Man erhält:

$$\begin{aligned}\varphi &= \operatorname{arctg} \left\{ -\frac{2}{\lambda} \frac{a}{\lambda} \operatorname{tgh} \left(2\pi \frac{z}{\lambda} \right) \operatorname{cotg} \left(\pi \frac{y}{a} \right) \right\} \\ \bar{A} &= \frac{A}{c} \frac{\lambda}{2a} \sqrt{\frac{4a^2}{\lambda^2} - 1} \cosh \left(2\pi \frac{z}{\lambda} \right) \cos \left(\pi \frac{y}{a} \right) \\ \bar{B} &= \frac{A}{c} \frac{\lambda}{2a} \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi} \cosh \left(2\pi \frac{z}{\lambda} \right) \sin \left(\pi \frac{y}{a} \right)\end{aligned}\quad (27)$$

In den Abb. 10, 11 und 12 ist φ , \bar{A} und \bar{B} als Funktion von z/λ und y/λ mit a/λ als Parameter in Schichtenliniendarstellung gegeben. Man sieht, daß bei größer werdendem Verhältnis a/λ die Änderung von φ hauptsächlich in der Mittelzone vor sich geht. Aber auch wenn $a/\lambda \rightarrow \infty$ geht, geht diese Lösung nicht in die triviale Lösung paralleler unendlichanger Kämme über.

Die Halbachse der Bahnellipse in x -Richtung ist bei $a/\lambda = 0,5$ identisch gleich Null. Es handelt sich um den Grenzfall, bei dem keine Energiefortpflanzung in der x -Richtung mehr stattfindet, man hat es also mit einer reinen Querschwingung des Kanals — wie sie schon lange bekannt sind [5] — zu tun. Interessant ist, daß die Ebenen $y = \pm a/2; \pm 3 a/2, \dots$ usw. für alle a/λ für die Schwingung in x -Richtung Knotenebenen sind.

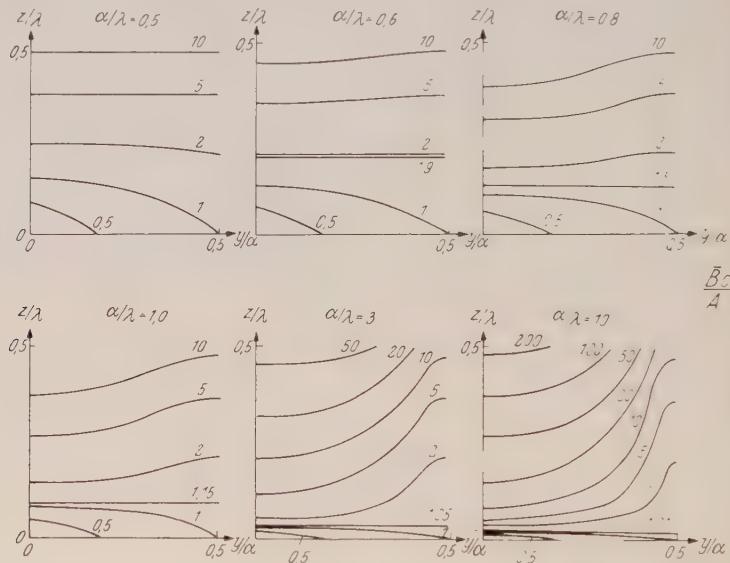


Abb. 12. Abhängigkeit von $\bar{B}c/A$ einem Wert, der die Größe der zweiten Halbachse (Achse normal zu x -Richtung) der Bahnellipse eines infinitesimalen Flüssigkeitsteilchens bestimmt von y/a und z/λ mit a/λ als Parameter in Schichtenliniendarstellung

Bemerkenswert ist auch das Verhalten der anderen Halbachse der Ellipse. Es gibt für jeden Wert von a/λ einen bestimmten Wert von z/λ für den ihre Größe unabhängig von y/a ist. Für größere z/λ -Werte nimmt sie zur Mitte zu ab, für kleinere zu. Für $a/\lambda = 0,5$ ist dieser Wert ∞ und nimmt mit zunehmendem a/λ ab. Für $a/\lambda \rightarrow \infty$ wird er 0.

Experimentelle Prüfung der Theorie

Eine Möglichkeit, die Übereinstimmung von Theorie und Experiment zu prüfen, bietet die experimentelle Bestimmung des Brechungsverhältnisses. Letzteres wurde aus Experimenten mit Prismen und Kanälen ermittelt. Andererseits ergibt sich aus den Gln. (13) und (14) da Brechungsverhältnis zu

$$n = c/C = \lambda/\Lambda = \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \quad (28)$$

In Abb. 13 sind außer der sich aus der Theorie ergebenden Kurve n über a/λ die experimentell ermittelten Werte eingetragen. Man sieht aus dem Punktefeld, daß die experimentelle Kurve etwa gleichsinnig zur theoretischen verläuft, gegen diese aber beträchtlich verschoben ist. Dies darf im Hinblick auf die groben Verallgemeinerungen, wie die Annahme einer idealen Flüssigkeit und damit des Verschwindens der äußeren Reibung, nicht wundern. Die große Streubreite der Messung ist auf die Unsicherheit der Auswertung von Aufnahmen, wie sie die Abb. 3, 4 und 5 zeigen, zurückzuführen.

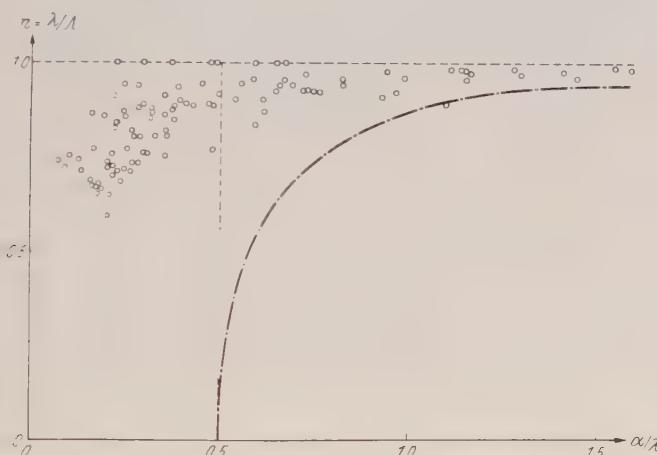


Abb. 13. Vergleich der experimentell gefundenen Werte für das Brechungsverhältnis mit der theoretisch ermittelten Kurve n über a/λ

Trotzdem kann man der Abb. 13 einiges entnehmen. Zunächst sieht man eine Anzahl von Punkten, die genau auf der Geraden $n = 1$ liegen. Bei diesen handelt es sich offenbar um Fälle, wo die Wellenausbreitung durch den Wellenleiter nicht geändert wurde. Das Geschwindigkeitspotential wird in diesem Fall durch die Gl. (1) gegeben.

Bei einer stärker gedämpften Schwingung wird allgemein durch die Dämpfung die Schwingungsdauer vergrößert, also die Frequenz und damit $1/\lambda$ verringert. Die „Schärfe“ der Resonanz wird ebenfalls durch die Dämpfung kleiner. Auf den vorliegenden Fall übertragen, wird also die Reibung

1. eine Verschiebung der Kurve n über a/λ nach kleineren Werten a/λ zu und
2. eine Verringerung der Neigung der Kurve n über a/λ gegen die a/λ -Achse für gleich große n -Werte hervorrufen. Dies ist, wie Abb. 13 zeigt, auch tatsächlich der Fall.

Wollte man die Wirkung der inneren und äußeren Reibung im vorliegenden Fall quantitativ berechnen, so müßte man die STOKES-NAVIERSCHEN Gleichungen für eine inkompressible Flüssigkeit für die

entsprechenden Randbedingungen (es verschwinde die Geschwindigkeit — alle Komponenten — am Boden und an den Seitenwänden und es herrsche an der freien Oberfläche äußerer Luftdruck) integrieren. Dies stößt jedoch auf beträchtliche Schwierigkeiten, da die Rechnung dreidimensional durchgeführt werden muß (Unsymmetrie durch die freie Oberfläche). Da außerdem die Amplitude ortsabhängig angenommen werden muß und die Kanaldimensionen von der gleichen Größenordnung wie die Wellenlängen sind, ist ein einfacher Ansatz für die Geschwindigkeiten nicht möglich. Als einzige Vereinfachung wird man wegen der geringen Geschwindigkeiten laminar rechnen dürfen.

In letzter Zeit wurden einige Untersuchungen über die gedämpften freien Schwingungen von Flüssigkeiten in Gefäßen angestellt — siehe z. B. [6]. In diesen theoretischen und experimentellen Arbeiten, die für und in etwas größeren Gefäßen gemacht wurden, wurde nur die Dämpfung der Schwingungen untersucht. Das Problem der Bahnen infinitesimaler Flüssigkeitsteilchen, die für diesen Fall nun notwendig nicht geschlossene Kurven sind, der Resonanzfrequenzen und ihrer „Schärfe“ wurde nicht angeschnitten.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß die für Wasserwellen geltenden Überlegungen wenigstens im groben Zügen auch für Schallwellen gelten müssen, da ja bekanntlich eine freie Flüssigkeitsoberfläche einem Gas mit einem Adiabatenexponenten $\gamma = 2$ entspricht. Diese Beziehung ist unter dem Schlagwort „Wasseranalogie“ allgemein bekannt [7]. Tatsächlich kennt man auch für Schallwellen Wellenleiter [8].

Herrn Dr. K. DESOYER (Technische Hochschule Wien) danke ich für viele Diskussionen.

Literatur

1. Leybold Wellenerreger, Gerätekarte 408 01; Leybold Wellenwanne, Gerätekarte 408 02.
2. H. LAMB, Lehrbuch der Hydrodynamik, Deutsche Auflage 1931, S. 405 u. f.f.
3. Handbuch der Experimentalphysik, Leipzig 1932, Bd. 4, Teil 4, S. 344 u. f.f.
4. F. W. GUNDLACH, Grundlagen der Höchstfrequenztechnik, Springer 1950, S. 266 u. f.
5. Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, Leipzig 1927, S. 331 u.f.f.
6. K. M. CASE und W. C. PARKINSON, Journal of Fluid Mechanics, Bd. 2, Teil 2, 1957, S. 172.
7. H. BÖMELBURG, Die praktische Anwendung der Wasseranalogie in quantitativer Form auf spezielle Probleme der Gasdynamik. Mitteilungen aus dem MAX-PLANCK-Institut für Strömungsforschung Nr. 10. Göttingen 1954.
8. E. A. G. SHAW, Journ. Acust. Soc. Am. 25 (1953), S. 224.

Fallout Particles of High Specific Activity*

By

B. Gross, A. Aron, E. Meyer

National Institute of Technology, Rio de Janeiro, Brazil

and **F. X. Roser, S. Costa Ribeiro, A. C. Olinto,**

Catholic University, Rio de Janeiro, Brazil

With 3 Figures

(Received April 28, 1958)

Abstract

Particulate air-borne fall-out has been measured, on filters exposed in a daily contamination-survey in Rio de Janeiro, Brazil.

On June 25th 1957, a particle of rather uncommon size ($r = 4 \mu$) and activity ($5 \cdot 10^{-9}$ curie) was caught. By applying WAY and WIGNER's decay-law for fission products, its origin could be traced back to the first British H-bomb test in the Christmas Islands 50 days earlier.

Analysis of the absorption curve, reduced to parallel beam incidence by means of GROSS' transform, and comparison tests with a P^{32} standard led to a separation into 3 main groups of beta-emitters present. Their energies identify the various fission products making up the activity of the particle. $Ce^{144} \rightarrow Pr^{144}$ and $Sr^{90} \rightarrow Y^{90}$ constitute its near totality.

Particle size, shape and activity are given; physical implications, as well as possible biological consequences are mentioned.

Fallout from nuclear bombs is constituted by radioactive material deposited on dust particles. The particulate nature of the fallout allows nearly quantitative collection by air filtering methods. The distribution of size and activity of the particles extends over a very wide range. Particles of rather high activity are frequently observed even at places far off from test-sites. Auto-radiographs of exposed filters show frequently bright spots, indicating the existence of individual active particles.

Fallout activities have been recorded in Rio de Janeiro since May 1956. On June 25, 1957 an unusually active filter was obtained. Examination showed that nearly the total activity of the filter was due to the presence of a single particle of unusual strength [1].

* Dedicated to Prof. V. F. HESS on his 75th birthday.

Measuring its decay curve for several months and applying WAY and WIGNER's law [2], the origin of this particle could be traced back to the British H-bomb test in the Christmas Islands on May 15.

Even though the theoretical decay curve follows quite closely the experimental one of HUNTER and BALLOU [3], the calculated size of the particle is clearly only a lower limit, since, most likely, not all of the decay products are present. The assumption of an exclusively active particle-mass, besides, is an oversimplification, not taking into account condensation processes on some aerosol nucleus which, probably, occurred during the formation of the particle.

It seemed, thus, worthwhile to investigate both nature and activity of this particle more closely. To this effect:

- a) an absorption curve was measured
- b) a comparison test was performed
- c) an absolute calibration of its size and activity was carried out.

a) Absorption measurement

Using an end-window Geiger counter of 1.4 mg/cm^2 absorber thickness and a set of calibrated Al-absorbers in always identical geometrical arrangements (source and filter as close to the window as possible), an absorption curve under good statistical conditions was obtained (rel. st. error $< 1\%$ and $< 10\%$ at the upper and lower end of the curve respectively).

The appearance is that of a typical β -absorption curve with several different energies present (Fig. 1).

The actual form of such curves depends on the geometry and sensitivity of the counter arrangements and of the source. The measured curve represents the superposition of a divergent beam of rays and easily conceals the existence of groups of rays with different energies.

For a point-source situated along the axis of symmetry at a fixed distance from a cylindrical end-window GEIGER counter application of the GROSS transform is possible [4]. In this way, the absorption curve for a parallel beam is obtained.

The original application of the transform in the theory of cosmic rays corresponded to a problem with 2π geometry. For this case a solution in closed form could be given. In the present case the solid angle between source and counter is less than 2π . A difference equation results which is not solved in closed form. It has been discussed by GROSS (UNESCO Symposium on Cosmic Rays, Cracow 1947, unpublished). A rapidly converging iteration method can be applied.

If $\psi(x)$ is the absorption curve for a parallel beam, $J(x)$ the measured curve, x the thickness of the absorber, and θ_0 the maximum value of θ (see inset of Fig. 1), then one has

$$J(x) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_0} \psi \left(\frac{x}{\cos \theta} \right) \sin \theta d\theta \quad (1)$$

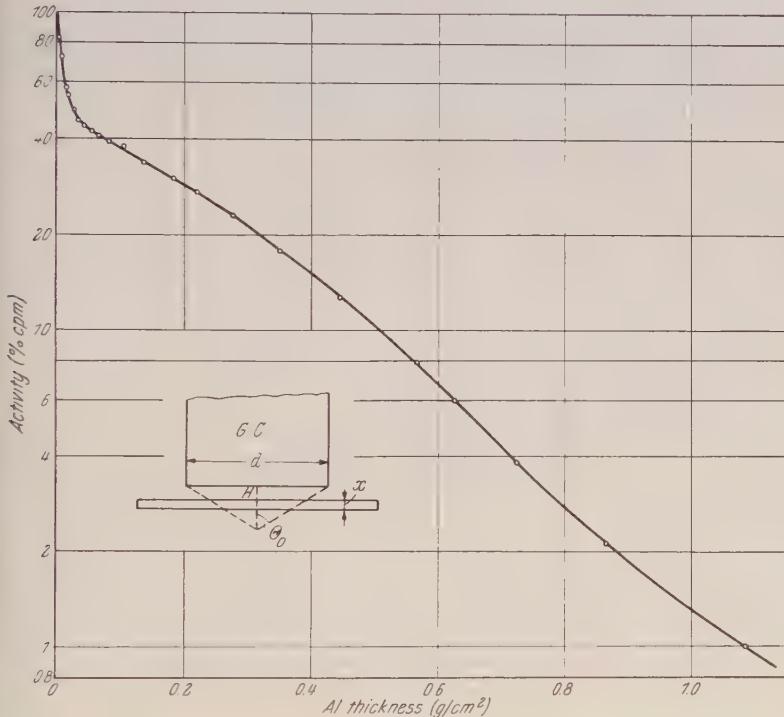


Fig. 1. Al-absorption curve of radioactive filter-particle. Inset: Geometry of absorber arrangement ($H = 8.5$ mm; $\theta_0 = 59.6^\circ$; x = Al-absorber thickness)

This gives for $\psi(x)$ the equation (GROSS, ref. 4, equation 2)

$$\psi(x) = f(x) + a \psi(x/a), \quad \text{where} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} [J(x) - x dJ(x)/dx] \quad \text{and} \quad (3 \text{ a})$$

$$a = \cos \theta_0 \quad (3 \text{ b})$$

Since $a < 1$, we solve (3 a) by the expansion

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \psi_n(x) \quad (4)$$

Substitution into (3 a) and equaling terms with identical powers of a gives

$$\psi_n(x) = \psi(x/a^n) \quad (5)$$

The final solution, therefore, becomes

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n f(x/a^n) \quad (6)$$

The first term coincides with the usual form of the GROSS transform.

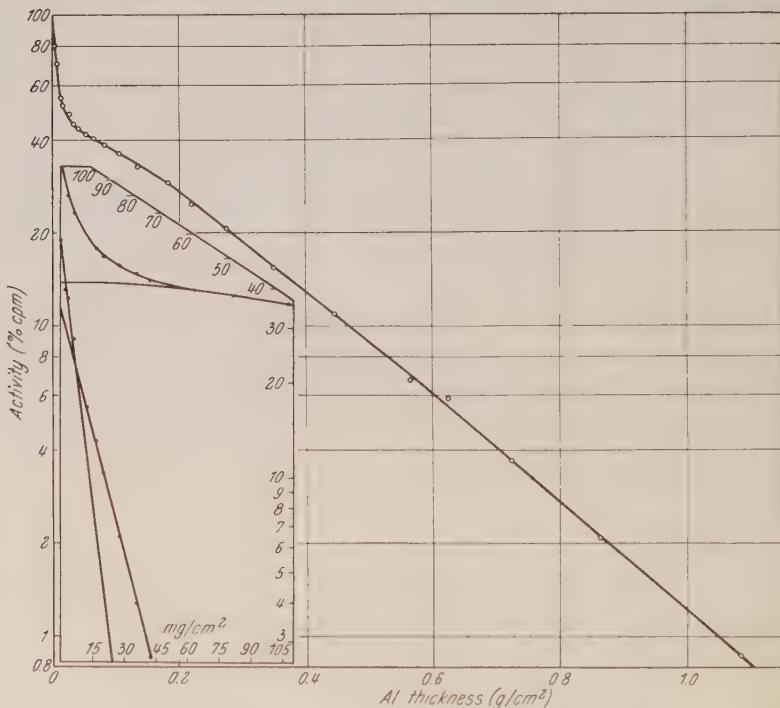


Fig. 2. Al-absorption curve of radioactive filter-particle after reduction to vertical incidence. Inset: Expanded low energy part of curve

It is frequently convenient to draw the absorption curve as $\log J(x)$. Then one has:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} J(x) [1 - x d \log J(x)/dx] \quad (7)$$

Developing expression (6) to the third term and taking $a = \cos \theta_0 = 0.506$ the transformed absorption curve was obtained. (See Fig. 2.)

On this transformed curve, a separation into several different energy components is clearly apparent. An almost complete lack of γ -radiation is a further distinctive feature of this curve.

But, even so, any precise energy determination by use of FEATHER's rule [5] or of GLENDEENIN's curves [6] is rendered difficult on account of the weakness of the source which does not easily permit to carry the absorption measurements through three orders of magnitude, as usually required.

However, due to the well defined exponential slope of the absorption curve, a half-value layer determination, instead of the end-point method, can be used to define the β -energies present [7].

Applying the usual method for extrapolation to zero-absorption, the following results, summarized in Table I, are obtained:

Table I. Analysis from absorption curve

Group	Half-value layer	Energy	Activity Measured
<i>a</i>	$\left\{ \begin{array}{l} 6 \text{ mg/cm}^2 \\ 12 \text{ mg/cm}^2 \end{array} \right.$	0.25 MeV	58%
		0.4 MeV	
<i>b</i>	195 mg/cm^2	3.0 MeV	42%

Taking into account several corrections related to β -energy and absorber thickness (forward-scattering etc.) [8], further improvements, for better separation of components could be achieved.

It is probable that, due to the slight upward trend in the absorption curve produced by the forward-scattering effect in the range from 10 to 100 mg/cm^2 absorber-thickness, the intermediate energy of group II (see Table II) escapes detection.

The energy of the penetrating component is in good agreement with the result of a similar determination carried out by A. ARON on another filter with evenly distributed fall-out [9].

b) Comparison Test

To improve the energy determination and discrimination, comparison-methods with radioactive standards (RaE , P^{32} etc.) have been worked out, making use of the full curve rather than of the end-point alone [10]. Again, the practical difficulty of these methods, for weak sources, lies in their dependence on absorption measurements carried all the way to the end of the range.

A new approach to comparison-methods is based on the procedure of comparing the transmissions of an unknown and a standard emitter with the same absorber, and of resorting to slope determinations of the curve obtained [11].

Plotting the logarithm of the transmissions of two absorbers against each other for each absorber, yields a straight line the slope of which is characteristic of both the standard source and the unknown emitter. Once a calibration curve for a whole range of known energies is obtained, determination of any unknown sample can be performed quickly with only a reduced number of absorption measurements.

Notwithstanding the great ease and simplicity of this method, energy and relative intensity of components can be obtained with a precision comparable to the more elaborate procedures formerly in use.

On applying this procedure to the particle on the filter, the following results have been obtained : (see Fig. 3).

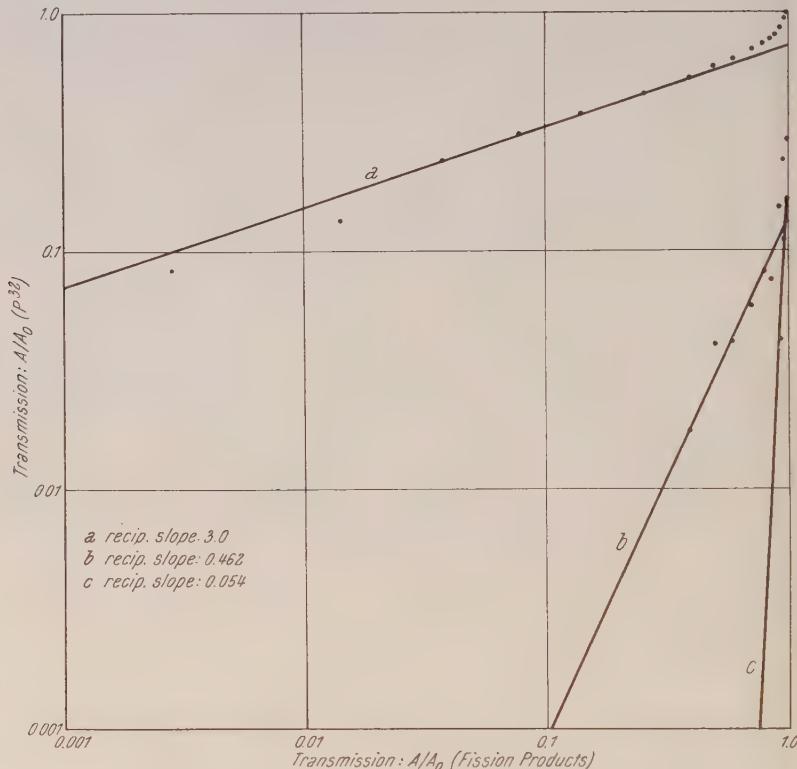


Fig. 3. Plot of Mixture of Fission Products versus a P³² Standard

The percentual distribution of soft and hard components, different from that of table I, is a consequence of an increased counter-window thickness (3.5 mg/cm^2) used for this analysis, as can be shown.

Table II. Analysis by Harley-Halden method

Group	Av. Slope	Av. Energy	Measured Intensity
I	3.0	3.1 MeV	72%
II	0.462	1.12 MeV	13%
III	0.054	0.3 MeV	15%

These energies can be attributed, with varying degrees of probability, to the following fission products present [12]:

Table III. Composition of particle

Group	Isotope	Energy	Rel. Group Abundance
I	$^{45}\text{Rh}^{106}$	3.5 MeV	10%
	$^{59}\text{Pr}^{144}$	3.2 MeV	80%
	$^{39}\text{Y}^{90}$	2.4 MeV	10%
II	$^{38}\text{Sr}^{89}$	1.48 MeV	
	$^{55}\text{Cs}^{137}$	1.2 MeV	
	$^{38}\text{Sr}^{90}$	0.6 MeV	
III	$^{58}\text{Ce}^{144}$	0.36 MeV	
	$^{55}\text{Cs}^{137}$	0.5 MeV	
	$^{61}\text{Pm}^{147}$	0.2 MeV	

Each of these isotopes has a sufficiently long half-life, either in itself or in its parent, and also a sufficient fission yield, to make its presence in the particle possible.

Other fission products of similar characteristics are ruled out on account of strong γ -radiation associated with them. The complete lack of α -rays precludes also the assumption of any original bomb material present.

Taking into account relative intensity and counting efficiency for the different energy groups, an estimate (see Table IV) of the relative amount of isotope activity present can be made:

Table IV. Relative isotopic abundance

$^{58}\text{Ce}^{144}$	(40%)	—————→	$^{59}\text{Pr}^{144}$	(40%)
$^{38}\text{Sr}^{90}$	(5%)	—————→	$^{39}\text{Y}^{90}$	(5%)
$^{45}\text{Rh}^{106}$	(5%);	—————→	$^{38}\text{Sr}^{89}, \ ^{55}\text{Cs}^{137}, \ ^{61}\text{Pm}^{147}$	(5%)

Two chains, therefore, are responsible for the near totality of the activity present.

c) Absolute Calibration

Using a calibrated $^{91}\text{Pa}^{234}$ source (2.3 MeV) under identical conditions of back-scattering etc., the absolute activity of the high energy β -emitters was determined, on January 10th 1958, as being $1.2 \cdot 10^{-10}$ curie

(or 4.4 desintegr./sec.). For the hard β -component no additional correction for the absorption in the filter is needed.

The result is in reasonable agreement with GROSS' activity determination of $5 \cdot 10^{-9}$ curie (or approx. $2 \cdot 10^{-9}$ curie for the hard component; see Table I) carried out 230 days earlier (half-life of $^{58}\text{Ce}^{144} = 275$ days).

According to Table IV, 3.2 desintegr./sec. are to be attributed to $^{59}\text{Pr}^{144}$ and .4 desintegr./sec. to each of the other hard β -emitters present ($^{45}\text{Rh}^{106}$, $^{39}\text{Y}^{90}$, and $^{55}\text{Cs}^{137}$).

For the number of radioactive atoms, making up the particle, only the much longer-lived parents ($^{58}\text{Ce}^{144}$, $^{88}\text{Sr}^{89}$, $^{44}\text{Ru}^{106}$, and $^{55}\text{Cs}^{137}$) are to be taken into account.

Since equilibrium conditions prevail, we have

$$N (\text{atoms}) = \frac{dn}{dt} / \lambda (\text{Ce}) + \frac{dn}{dt} / \lambda (\text{Sr}) + \frac{dn}{dt} / \lambda (\text{Ru}) + \frac{dn}{dt} / \lambda (\text{Cs}) \quad (8)$$

leading to the value of $N = 11.5 \cdot 10^8$, or $6.1 \cdot 10^8$ atoms, depending on whether Cs is included or not.

This represents a volume with a radius of 0.25 or 0.2μ respectively.

Finally, a direct microscopic measurement on the particle itself was performed. As expected, its actual size is considerably bigger (radius = 4μ) than its active mass.

Activity and size, as well as the almost perfect spherical shape of the condensation nucleus may, possibly, lead to a better insight into the physical facts underlying formation, transport and subsequent contamination of such nuclei in atomic test-explosions.

Since, in May and June, the thermal equator lies north of latitude 0, the particle may be due to tropospheric rather than to stratospheric fall-out.

Great fluctuations of fall-out activity and particularly strong single values have been measured elsewhere too, as may be seen, for instance, from the reports of the U.S. Naval Research Laboratory in Washington, which contain observations from several South American stations. The present results may lead one to believe that many of these extraordinary observations must have been caused by single particles of much higher than medium activity.

The customary reduction of fall-out activity to unit air volume (cubic meter or cubic foot) would appear unjustified in cases where the activity is predominantly produced by single particles, since for different sampling times there would result different activities. The reduction to unit air volume is only justified, when the number of particles is big enough to guarantee a statistical distribution.

These results have also a bearing on the biological effects of radiation. Particles of high specific activity, which are not soluble in the body fluids and are retained in the body, constitute hot spots that may cause formation of tumors.

Our sincerest thanks are due to the A. E. C. N. Y. Health and Safety Division for putting their research facilities at our disposal and, in particular, to Mr. IRA B. WHITNEY for carrying out the comparison measurements and for having with us many helpful discussions on their interpretation.

We gratefully acknowledge also the sponsorship and the financial assistance granted to the project by the National Nuclear Energy Commission of Brazil.

References

1. A. ARON and B. GROSS, Zeitschr. Naturf. **12a**, 944 (1957).
2. K. WAY and E. P. WIGNER, Phys. Rev. **73**, 1318 (1948).
3. H. F. HUNTER and N. E. BALLOU, Nucleonics 9, Nov. (1951).
4. B. GROSS, Zeitschr. Phys. **83**, 214 (1933).
5. N. FEATHER, Proc. Cambridge Phil. Soc. **34**, 599 (1938).
6. L. E. GLENDEEN, Nucleonics 2, Jan. (1948).
7. J. M. CORK, Radioactivity and Nuclear Physics, D. Van Nostrand Co., New York (1957).
8. B. P. BURTT, Nucleonics 5, Feb. (1949); L. R. ZUMWALT, Report MonC-397, Oak-Ridge (1949).
9. A. ARON, An. Acad. Bras. Cienc. **28**, 423 (1956).
10. L. KATZ and A. S. PENFOLD, Rev. Mod. Phys. **24**, 28 (1952).
11. J. H. HARLEY and N. HALLDEN, Nucleonics 13, Jan. (1955).
12. W. JENTSCHKE, Zeitschr. Phys. **120**, 165 (1943); J. M. SIEGEL, Rev. Mod. Phys. **18**, 513 (1946); National Nuclear Energy Series: vol. IV/9, McGraw-Hill Co., New York (1951).

Zur Theorie des Impulsdurchganges in einem 2 n -Pol-Hohlraumsystem*

Von

E. Ledinegg

Institut für Theoretische Physik der Technischen Hochschule Graz

Mit 2 Abbildungen

(Eingegangen am 12. Mai 1958)

Zusammenfassung

Die Millimicrosecond-Pulse-Technik befaßt sich mit der Untersuchung des Impulsdurchgangs sehr kurzzeitiger Signale durch nicht quasistationäre Schaltelemente. In der vorliegenden Arbeit wird in Fortsetzung einer früheren Arbeit des Verfassers (A.E.U. 9, 363, 1955) eine allgemeine Theorie des Impulsdurchgangs durch ein Hohlraumsystem entwickelt, welchem durch n äußere Zuführungen Spannungsimpulse zugeführt werden, wobei das System durch innere Koppelglieder in energetischer Wechselwirkung steht. Zur Wahrung der individuellen Eigenschaften der einzelnen Resonatoren wird eine schwache Kopplung der letzteren vorausgesetzt, woraus sich zwanglos die mathematische Behandlung durch eine Störungsrechnung erster Ordnung ergibt. Die Koeffizienten der Übertragungsmatrix werden explizit durch Energieterme dargestellt, welche sich aus den Feldverteilungen der einzelnen (ungekoppelten) Resonatoren ergeben.

§ 1. Einleitung

Die Übertragung von Strom-, bzw. von Spannungsimpulsen durch ein quasistationäres Netzwerk findet bekanntlich im Rahmen der 2 n -Pol-Theorie seine prägnanteste Darstellung. Die Elemente der Leitwert-, bzw. Widerstandsmatrix sind dabei über eine FOURIER-Transformation mit den Elementen der Übertragungsmatrix verknüpft.

Bei der Impulsübertragung sehr kurzzeitiger Signale (Impulsbreite etwa 10^{-8} bis 10^{-10} sec) liegen die das Signal konstituierenden Frequenzen im cm-Wellengebiete und anstelle des quasistationären Netzwerkes tritt eine Hohlraum-Hohlrohrschaftung.

* Herrn Professor Dr. VICTOR F. HESS zum 75. Geburtstag gewidmet.

In der vorliegenden Arbeit wird auf Grund vorausgegangener Arbeiten¹ gezeigt, daß es möglich ist, den $2n$ -Pol-Formalismus auf eine

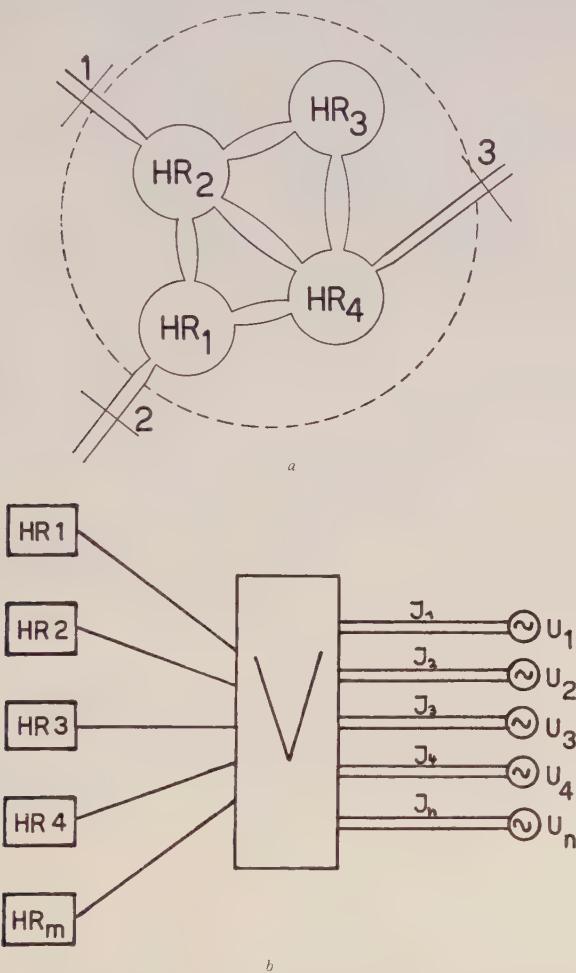


Abb. 1. a) Schematische Ansicht eines HR-Systems, welches durch mehrere Zuleitungen erregt wird
b) Blockdiagramm eines $2n$ -Pol- m -Hohrraum-Systems. In der Abbildung bedeuten: $HR_i = i$ -ter Hohrraumresonator, V = Verteiler, welcher einerseits die Spannungen $U_1 \dots U_n$ an die HR weiterleitet und andererseits auch für die innere Wechselwirkung der einzelnen HR des Systems zuständig ist

beliebige cm-Wellen-Schaltung zu übertragen, wobei eine schwache Koppelung der einzelnen Schaltelemente (Hohlräume) vorausgesetzt ist.

¹ E. LEDINEGG, A.E.Ü. 9, 363 (1955); wird im folgenden unter [1] zitiert.
E. LEDINEGG, Österr. Ing.-Arch., 11, Heft 1, 20 (1957); wird im folgenden unter [2] zitiert.

In [1] wurde der Impulsdurchgang durch ein beliebiges HR-System behandelt, welches nur einen Eingang und einen mit einem Widerstand versehenen Ausgang besitzt. Für die Übertragungsfunktion

$$g(t - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega$$

bzw. ihrer FOURIER-Transformierten ergab sich der Ausdruck

$$\hat{g}(\omega) = \frac{P_{n-1}(p)}{P_n(p)}, \quad p = j\omega$$

wobei \hat{g} als Quotient zweier ganzer rationaler Funktionen ($n - 1$)-ten, bzw. n -ten Grades von p dargestellt ist. Die auftretenden Koeffizienten sind dabei durch eindeutig bestimmte Energieterme der ungekoppelten Konfiguration gegeben. Mittels der in [2] angegebenen Berechnung von Eingangswiderständen beliebiger Hohlraumschaltungen lässt sich nun ganz allgemein die Impulstransfernung für ein schwach gekoppeltes Hohlraumsystem mit einer beliebigen Anzahl von Ein-, bzw. von Ausgängen durch explizite Formeln erfassen, welche, wie im quasistationären Falle, aus einer $2n$ -Pol-Darstellung des Systemes entspringen (s. Abb. 1).

Damit können eine Reihe von Problemstellungen der Mikrowellenimpulstechnik behandelt werden, wie z. B. die folgende, sehr allgemein gefaßte Aufgabe: Einem Hohlraumsystem werden r Spannungsimpulse $U_i(t)$ durch r Zuleitungen aufgeprägt. Es sind die $(n - r)$ -Stromimpulse $I_i(t)$ an den $(n - r)$ -Ausgängen, welche durch die Widerstände R_i abgeschlossen sind, zu ermitteln (s. Abb. 2).

§ 2. Die Widerstandsmatrix und die Übertragungsmatrix eines $2n$ -Poles

Liegt ein linearer $2n$ -Pol vor und werden diesem n zeitabhängige Spannungsimpulse $U_i = U_i(t)$ aufgeprägt, so besteht zwischen letzteren und den sich ergebenden Stromimpulsen $I_i = I_i(t)$ der folgende Zusammenhang:

$$I_i(t) = \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} g_{i,k}(t - \tau) U_k(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Dabei bedeutet $G = (g_{ik})$ die Übertragungsmatrix. Der Zusammenhang zwischen den g_{ik} und den Elementen der Leitwertmatrix \hat{g}_{ik} wird durch den Übergang in den Frequenzraum hergestellt. Man erhält:

$$\hat{I}_i(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} I_i(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} g_{i,k}(\vartheta) e^{-j\omega \vartheta} d\vartheta \cdot \int_{-\infty}^{\infty} U_k(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau$$

oder:

$$\hat{I}_i(\omega) = \sum_{k=1}^n \hat{g}_{i,k} \cdot \hat{U}_k(\omega) \quad (3a)$$

Man hat also

$$g_{i,k}(t - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_{i,k}(\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \quad (3 b)$$

Löst man Gl. (3 a) nach den \hat{U}_k auf, so kommt:

$$\hat{U}_i(\omega) = \sum_{k=1}^n \hat{h}_{i,k} \cdot \hat{I}_k(\omega)$$

mit

$$(g_{i,k}) \circ (\hat{h}_{i,k}) = (\delta_{i,k}) \quad (3 c)$$

Wir transformieren Gl. (3 c) in den Objektraum zurück. Mit

$$U_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{U}_i(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

erhält man aus Gl. (3 c):

$$U_i(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_{i,k}(\omega) \hat{I}_k(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Wegen:

$$\hat{h}_{i,k}(\omega) \cdot \hat{I}_k(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_{i,k}(t - \tau) \cdot I_k(\tau) e^{-j\omega t} d\tau dt$$

bekommt man weiter

$$U_i(t) = \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} I_k(\tau) d\tau \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_{i,k}(t' - \tau) \cdot e^{j\omega(t-t')} d\omega dt'$$

oder

$$U_i(t) = \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} h_{i,k}(t - \tau) \cdot I_k(\tau) d\tau \quad (4 a)$$

mit

$$h_{i,k}(t - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_{i,k}(\omega) \cdot e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \quad (4 b)$$

Sind nicht die Spannungen U_i , sondern die Ströme I_i vorgegeben, so stellt Gl. (3) ein lineares Integralgleichungssystem 1-ter Art dar, welches durch das reziproke System Gl. (4 a), (4 b) gelöst wird.

Zur Lösung der am Ende des vorhergehenden Abschnittes gestellte Aufgabe hat man zu beachten, daß im Frequenzraum die Beziehungen

$$\hat{U}_j(\omega) = \mathfrak{R}_j \cdot \hat{I}_j(\omega), \quad j = r+1, r+2 \dots n$$

gelten, wobei die \Re_i bekannte Abschlußwiderstände darstellen und erhält dann unmittelbar aus Gl. (3 a) die linearen Gleichungen:

$$\sum_{k=r+1}^n \hat{g}_{i,k} \Re_k \cdot (1 - \delta_{i,k}) \hat{I}_k = - \sum_{k=1}^r \hat{g}_{i,k} \hat{U}_k$$

mit

$$\hat{U}_k(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_k(t) e^{-j\omega t} dt$$

aus welchen die \hat{I}_k zu berechnen sind. Die gesuchten Stromimpulse sind dann durch

$$I_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{I}_k(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

gegeben.

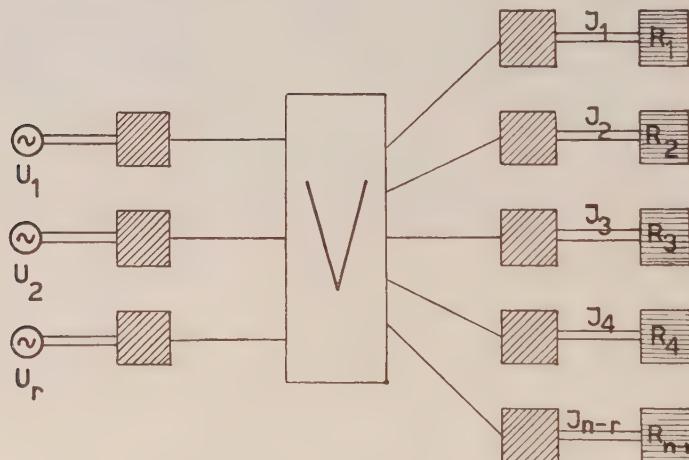


Abb. 2. Blockdiagramm eines modifizierten $2n$ -Pol-Hohlraumsystems. Das System wird durch r äußere Leitungen erregt und ist durch $n - r$ Widerstände $R_1 \dots R_{n-r}$ abgeschlossen

Für das Folgende ist es notwendig, den Zusammenhang der Elemente der Widerstandsmatrix $\hat{h}_{i,k}$ mit bestimmten Leerlaufkurzschlußwiderständen des $2n$ -Poles in Evidenz zu setzen.

Aus Gl. (3 c) erhält man, wenn der $2n$ -Pol durch beliebige Widerstände $W_1 \dots W_n$ abgeschlossen wird, die Beziehung:

$$\begin{array}{cccc|c} \hat{h}_{11} - W_1, & \hat{h}_{1,2} & \dots & \hat{h}_{1,n} & \\ \hat{h}_{2,1}, & \hat{h}_{22} - W_2 & \dots & \hat{h}_{2,n} & = 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \\ \hat{h}_{n,1}, & \hat{h}_{n,2} & \dots & \hat{h}_{n,n} - W_n & \end{array} \quad (5)$$

Wir führen nunmehr die n Leerlaufwiderstände R_i^L und die $\binom{n}{2}$ Leerlaufkurzschlußwiderstände R_{ik} durch die Festsetzungen

$$W_i = R_i^L = \frac{U_i}{I_i}, \quad \text{wenn: } W_j = \infty \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n \quad (5 \text{ a})$$

$$W_i = R_{i,k} = \frac{U_i}{I_i}, \quad \text{wenn: } \begin{cases} W_j = \infty & \text{für } j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots \\ \dots k-1, k+1, \dots, n \\ W_k = 0 & (k > i) \end{cases} \quad (5 \text{ b})$$

ein und erhalten gemäß Gl. (5 a)

$$\hat{h}_{i,i} = R_i^L \quad (6 \text{ a})$$

während Gl. (5 b) die $\binom{n}{2}$ Determinanten

$$\left| \begin{array}{cccc} \hat{h}_{i,i} - R_{i,k}, & \hat{h}_{i,i+1} & \dots & \hat{h}_{i,k} \\ \delta_{i+1,i}, & \delta_{i+1,i+1} & \dots & \delta_{i+1,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{k-1,i}, & \delta_{k-1,i+1} & \dots & \delta_{k-1,k} \end{array} \right| = 0, \quad \left(\delta_{r,s} = \begin{cases} 0, r \neq s \\ 1, r = s \end{cases} \right)$$

$$\hat{h}_{k,i}, \quad \hat{h}_{k,i+1} \quad \dots \quad \hat{h}_{k,k}$$

liefert. Daraus findet man mit Benützung der Symmetrierelationen

$$\hat{h}_{i,k} = \hat{h}_{k,i}$$

welche für lineare passive 2 n -Pole gelten, die Beziehungen:

$$\hat{h}_{i,k}^2 = (R_i^L - R_{i,k}) \cdot R_k^L \quad (6 \text{ b})$$

Gl. (6 a) und Gl. (6 b) gestatten die Koeffizienten h_{ik} in einfacher Weise durch die Widerstände R_i^L , bzw. R_{ik} auszudrücken. Nun liefert die [2] auf Grund der Störungsrechnung entwickelte Schaltungstheorie das 2-Polverhalten eines HR-Systemes, das heißt den Eingangswiderstand als Funktion der Hohlraum-Parameter und der Frequenz. Es sind demnach die in Gl. (6 a) und (6 b) auftretenden Widerstände R_i^L , R_{ik} durch die Hohlraum-Parameter des Systems darstellbar. Da anderseits jede Hohlraumschaltung, welche n Eingänge besitzt, nach „Außen“ als linearer 2 n -Pol wirkt (s. [2]), ist damit das Hohlraumsystem durch eine Widerstandsmatrix der Form (3 c) zu beschreiben.

§ 3. Das 2 n -Pol- m -Hohlraumsystem

Wir betrachten ein HR-System, bestehend aus m -Hohlraumresonatoren, welche durch $\binom{m}{2}$ beliebige Koppelglieder verbunden sind. Das

System wird durch eine Speiseleitung, die etwa am l -ten HR angeschlossen ist, angeregt. Es soll zunächst der Eingangswiderstand R als Funktion der Frequenz ω berechnet werden.

Ist die energetische Wechselwirkung zwischen den einzelnen Resonatoren klein, so ergibt sich das Frequenzverhalten mit Hilfe einer Störungsrechnung erster Ordnung, wobei der „Ausgangszustand“ als m -fach entartet angesehen wird und der entkoppelten Konfiguration entspricht. Im Ausgangszustand besitzen die Resonatoren eine gemeinsame Eigenfrequenz ω_0 , die zu den Eigenfeldern $\{\mathfrak{E}_v, \mathfrak{H}_v\}$ gehören. Der Endzustand wird durch passende Deformationen der metallischen Berandungen des Systems sowie durch kleine Änderungen der Mediumskonstanten erreicht. Im Sinne der Störungsrechnung, die auf das System der MAXWELLSchen Gleichungen anzuwenden ist, gehen dann die aus dem Ausgangszustande zu bildenden Linearaggregaten

$$\mathring{\mathfrak{E}}_k = \sum_{v=1}^m \alpha_v(\delta\omega) \mathfrak{E}_v \quad \text{mit} \quad \delta\omega = \omega - \omega_0, \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

stetig in den Endzustand über.

Für den Eingangswiderstand findet man nach längerer Rechnung bei Anregung durch eine Linearantenne²:

$$R = \frac{U_0 U_0^*}{|\delta N(0)|^2} \cdot \frac{| \begin{array}{cccc} T_{11}, & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21}, & T_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1}, & A_{n2} & \dots & T_{nn} \end{array} |}{| \begin{array}{cccc} T_{22}, & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ A_{32}, & T_{33} & \dots & A_{3n} \\ \vdots & & & \\ A_{n2}, & A_{n3} & \dots & T_{nn} \end{array} |} \quad (7a)$$

Dabei ist

$$T_{vv} = \sum_s' A_{vv}^{(v,s)} + B_{vv} + \Phi_v \left(\frac{j}{\omega_0} \Omega_v - L_v \right) + \frac{j}{\omega_0} V_{vv} - \frac{\delta\omega}{\omega_0} W_{vv} \quad (7b)$$

mit

$$A_{vv}^{(v,s)} = \int_{R_{vv}s} \{ \epsilon \mathfrak{E}_v^{(z)} \mathfrak{E}_v^{(z)*} - \mu \mathfrak{H}_v^{(z)} \mathfrak{H}_v^{(z)*} \} d\tau \quad (c)$$

$$A_{vp} = \int_{R_{vp}} \{ \epsilon \mathfrak{E}_v^{(z)} \mathfrak{E}_p^{(z)*} - \mu \mathfrak{H}_v^{(z)} \mathfrak{H}_p^{(z)*} \} d\tau \quad (d)$$

$$B_{vv} = \int_{J R_p} \{ \epsilon \mathfrak{E}_v \mathfrak{E}_v^* - \mu \mathfrak{H}_v \mathfrak{H}_v^* \} d\tau \quad (e)$$

² Beziiglich der näheren Rechnung vgl. [2] und: E. LEDINEGG und P. URBAN, A.E.U. 7, 561–568 (1953).

$$\Phi_v = \int_{F_v} \mathfrak{H}_v \mathfrak{H}_v^* df, \quad \Omega_v = \omega_0 L_v = \sqrt{\frac{\mu_M \omega_0}{2 \sigma_M}} \quad (f)$$

Die Terme (c) bis (e) sind alle frequenzunabhängig und bauen sich nur aus den Feldgrößen der ungekoppelten Konfiguration auf. Die in (c) bis (e) auftretenden Integrale sind über die Hohlraumvolumen R_v , bzw. über die Volumen $R_{v,p}$ der Koppelglieder zu erstrecken. ΔR_v ist das Deformationsvolumen des v -ten HR. F_v bezeichnet die Oberfläche des v -ten Hohlraumes.

Den einzelnen Termen kommt die folgende Bedeutung zu: $A_{v,v}^{(v,s)}$ gibt die Rückwirkung des (v, s) -ten Koppelgliedes auf den v -ten Hohlraum an, $A_{v,p}$ ist der Koppelparameter zwischen dem v -ten und p -ten Resonator, $B_{v,v}$ setzt die Verstimmung (gegenüber ω_0) des v -ten HR in Evidenz. Ferner bedeuten $W_{v,v}$, bzw. $V_{v,v}$ den Energieinhalt, bzw. die Volumsverlustleistung des v -ten HR.

Die Symmetrierelationen $\hat{h}_{i,k} = \hat{h}_{k,i}$, welche zunächst nur für quasistationäre Systeme gelten, übertragen sich auch auf Hohlraumsysteme, wie aus dem von W. DÄLLENBACH unter sehr allgemeinen Voraussetzungen bewiesenen Reziprozitätstheorem folgt³.

Gemäß des Vorganges in [2] gewinnt man aus Gl. (7 a) die Leerlaufwiderstände R_i^L , bzw. die Leerlaufkurzschlußwiderstände $R_{i,k}$ durch geeignete Festsetzung der $B_{v,v}$ -Glieder in den $T_{v,v}$. Besitzt z. B. der k -te HR eine Anregungsstelle ΔF_k , welche offen bleibt, so hat dies eine Abänderung der Randbedingung $\mathfrak{E}_l = 0$ längs ΔF_k zur Folge. Dies wirkt sich in einem zusätzlichen frequenzunabhängigen $B'_{k,k}$ -Term aus, so daß anstelle von $B_{k,k}$, $\mathring{B}_{k,k} = B_{k,k} + B'_{k,k}$ bzw.

$$\tilde{T}_{k,k} = \sum_s' A_{k,k}^{(k,s)} - \Phi_k \left(\frac{j}{\omega_0} \Omega_k - L_k \right) + \frac{j}{\omega_0} V_{k,k} - \frac{\delta \omega}{\omega_0} W_{k,k} + B_{k,k} + B'_{k,k}$$

anstelle von $T_{k,k}$ in den Determinanten von Gl. (7 a) eingeht.

Zur bequemen Darstellung von R_i^L und $R_{i,k}$ führen wir die folgenden Abkürzungen ein:

$$T_{11}, \quad A_{12} \quad A_{13} \dots A_{1n}$$

$$D_n(T_{11}, T_{22} \dots T_{nn}) = \begin{vmatrix} A_{21}, & T_{22}, & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ A_{n1}, & A_{n2}, & A_{n3} & \dots & T_{nn} \end{vmatrix} \quad (8a)$$

$$\mathring{D}_n = D_n(\mathring{T}_{11}, \mathring{T}_{22} \dots \mathring{T}_{nn}) \quad (b)$$

$$\mathring{D}_{n-1}^{(i)} = D_{n-1}(\mathring{T}_{11} \dots \mathring{T}_{i-1, i-1}, \mathring{T}_{i+1, i+1} \dots \mathring{T}_{n,n}) \quad (c)$$

$$\mathring{D}_n(T_{i,i}) = D_n(\mathring{T}_{11} \dots \mathring{T}_{i-1, i-1}, T_{i,i}, \mathring{T}_{i+1, i+1} \dots \mathring{T}_{n,n}) \quad (d)$$

³ W. DÄLLENBACH, Archiv für Elektrotechnik 36, 153 (1942).

$$\dot{D}_n(T_{i,i}, T_{k,k}) = \quad (e)$$

$$= D_n(\dot{T}_{11} \dots \dot{T}_{i-1,i-1}, T_{i,i}, \dot{T}_{i+1,i+1}, \dots \dot{T}_{k-1,k-1}, T_{k,k}, \dot{T}_{k+1,k+1} \dots \dot{T}_{nn}) \\ \dot{D}_{n-1}^{(i)}(T_{k,k}) = \quad (f)$$

$$= D_{n-1}(\dot{T}_{11} \dots \dot{T}_{i-1,i-1}, \dot{T}_{i+1,i+1} \dots \dot{T}_{k-1,k-1}, T_{k,k}, \dot{T}_{k+1,k+1} \dots \hat{T}_{n,n})$$

Der Ausdruck Gl. (b) entsteht aus (a) durch Ersatz aller T_{vv} durch \dot{T}_{vv} . Streicht man in (b) die i -te Zeile und Kolonne, so erhält man den Ausdruck (c), während man (d) durch Ersatz von $\dot{T}_{i,i}$ durch $T_{i,i}$ gewinnt. Schließlich ergibt sich (f), wenn in (c) $\dot{T}_{k,k}$ durch $T_{k,k}$ ausgetauscht wird.

Mit den obigen Abkürzungen bekommt man dann:

$$R_i^{(L)} = \left\{ \frac{U_0 U_0^*}{|\delta N(0)|^2} \right\}_i \cdot \frac{\dot{D}_n(T_{i,i})}{\dot{D}_{n-1}^{(i)}} \quad (9 \text{ a})'$$

$$R_{i,k} = \left\{ \frac{U_0 U_0^*}{|\delta N(0)|^2} \right\}_i \frac{\dot{D}_n(T_{i,i}, T_{k,k})}{\dot{D}_{n-1}^{(i)}(T_{k,k})} \quad (9 \text{ b})$$

Die in Gl. (9 a) und (9 b) vor den Determinanten stehenden Ausdrücke sind frequenzunabhängig und werden von der Geometrie des Einkoppelorganes bestimmt. Unter $\delta N(0)$ ist die eingestrahlte Leistung bei der Ausgangsfrequenz ω_0 zu verstehen, welche aufgebracht werden muß, um den Übergang vom „virtuellen“ Ausgangszustand zum „realen“ Ausgangszustand bei der Frequenz ω_0 herzustellen. Im Rahmen der hier durchgeföhrten Rechnung ist eine weitere Determinierung von $\delta N(0)$ nicht möglich und auch nicht notwendig.

Für den Fall, daß jeder Resonator nur ein äußeres Polpaar besitzt, ergeben sich in Verbindung mit den Gln. (6 a) und (6 b) für die gesuchten Koeffizienten $\dot{h}_{i,i}$, bzw. $\dot{h}_{i,k}$ der Widerstandsmatrix des Hohlraumsystems:

$$\dot{h}_{i,i} = \left\{ \frac{U_0 U_0^*}{|\delta N(0)|^2} \right\}_i \frac{\dot{D}_n(T_{i,i})}{\dot{D}_{n-1}^{(i)}} \quad (10 \text{ a})$$

$$\dot{h}_{i,k}^2 = \left\{ \frac{U_0 U_0^*}{|\delta N(0)|^2} \right\}_i \cdot \left\{ \frac{U_0 U_0^*}{|\delta N(0)|^2} \right\}_k \cdot \left[\frac{\dot{D}_n(T_{i,i})}{\dot{D}_{n-1}^{(i)}} - \frac{\dot{D}_n(T_{i,i}, T_{k,k})}{\dot{D}_{n-1}^{(i)}(T_{k,k})} \right] \cdot \frac{\dot{D}_n(T_{k,k})}{\dot{D}_{n-1}^{(k)}} \quad (10 \text{ b})$$

Damit ist das Frequenzverhalten eines $2n$ -Pol- m -Hohlraumsystems explizite zum Ausdruck gebracht. Die Koeffizienten der Widerstandsmatrix sind dabei durch Polynome n -ten, bzw. $(n-1)$ -ten Grades in $\omega - \omega_0$ dargestellt und werden im übrigen durch die Energieterme Gl. (7) der Einzelresonatoren bestimmt. In einer beabsichtigten Fortsetzung dieser Arbeit sollen die Bandfiltereigenschaften spezieller HR-Systeme auf Grund der angegebenen Darstellung näher untersucht werden.

Buchbesprechungen

Physik und Technik der Atomreaktoren. Von F. CAP. Mit 100 Textabb., XXIX, 487 S. Wien: Springer-Verlag. 1957. Geb. S 384.—, DM 64.—, \$ 15.25, sfr. 65.50.

Der Verfasser hat die lobenswerte Aufgabe übernommen, zum ersten Male in deutscher Sprache ein Werk zu verfassen, das die vielen in den letzten Jahren erschienenen Arbeiten dieses hochaktuellen Fachgebietes systematisch darstellt. Man kann auch ohne Übertreibung feststellen, daß dieses Buch als Lehrbuch dem derzeitigen Stand unseres theoretischen, experimentellen und technischen Wissen über Reaktoren gerecht wird. Es ist erstaunlich, wie gründlich und umfassend allem Rechnung getragen wird, ausgehend von den kernphysikalischen Grundlagen über die Theorie, den Bau und Betrieb sowie Sicherheitsvorkehrungen solcher Anlagen bis zu den Verwendungszwecken. Im letzten Abschnitt werden sogar Rechtsprobleme und Organisationsfragen nach neuesten Gesichtspunkten behandelt. Ausführliche Literatur-, Namen- und Sachverzeichnisse lassen keinen Wunsch offen, und eine Übersicht über die verwendeten Symbole erleichtert ganz beträchtlich den Gebrauch des Werkes. Der Referent ist außerstande, bei der Fülle des gebotenen Materials ins Detail zu gehen. Es sei ihm daher gestattet bei den kernphysikalischen Grundlagen auf die sehr instruktiven Übungsbeispiele hinzuweisen, die das Einarbeiten auch des etwas ferner stehenden Technikers wesentlich erleichtern. Ferner sei auf die schöne Behandlung der Diffusionsgleichung hingewiesen, welche ebenfalls als gut gelungen zu bezeichnen ist. Die Diffusion nimmt bekanntlich eine zentrale Stellung ein, deshalb sind Aufgaben in dieser Richtung als besonders instruktiv anzusehen.

So kann man nur dem eben erschienenen Werke das beste Zeugnis ausstellen und einem ihm gebührenden Erfolg wünschen. P. URBAN, Graz

Theorie schallnaher Strömungen. Von K. G. GUDELEY. Mit 125 Textabb., XV, 376 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. Geb. DM 42.—.

Das eben erschienene Buch des bekannten Verfassers bringt zum ersten Male die Theorie schallnaher Strömungen. Bekanntlich zeigt das Verhalten von Gasströmungen, je nach dem die Strömungsgeschwindigkeit kleiner oder größer als die Schallgeschwindigkeit ist, große Verschiedenheiten und besonders der Übergang zwischen diesen beiden Formen, das schallnahe Gebiet hat in den letzten Jahren großes Interesse verursacht. Die Forschung auf diesem Gebiete bereitet sowohl auf physikalischem als mathematischem Standpunkt derart große Schwierigkeiten und dem Verfasser ist es in ausgezeichneter Weise gelungen, das schwierige Gebiet klar und verständlich darzustellen. Dabei wird immer von den physikalischen Vorstellungen ausgegangen und auf Grund dieser die mathematische Theorie aufgebaut. Die Darstellung verlangt von dem Leser natürlich einige mathematische Kenntnisse, bietet aber anderseits selbst für den Matematiker viele interessante neue Betrachtungsweisen.

Nach einer Einführung in die allgemeinen Grundlagen der Theorie werden die Vereinfachungen der Differenzialgleichungen für die Strömung und das Ähnlichkeitsgesetz für schallnahe Strömungen behandelt. Daran schließt sich im

Kapitel III die linearisierte Behandlung schallnaher Strömungen und im Kapitel IV eine Zusammenfassung der exakten Lösung der Potentialgleichung. Im Kapitel V werden die Grundlagen der Hodographenmethode erörtert, sowie im Anschluß daran (Kapitel VI) eine Diskussion schallnaher Strömungsfelder mit Hilfe des Hodographen. Bekanntlich nimmt die Tricomicsche Gleichung eine zentrale Stellung bei der Behandlung von Problemen mit Hilfe der Hodographenmethode ein, weshalb das Kapitel VII etwas ausführlicher auf ihre Partikularlösungen eingehet. Hier findet der auf diesem Gebiet arbeitende Aerodynamiker beispielsweise die Entwicklung geeigneter Lösungen nach Eigenfunktionen, die verschiedenen Grenzfälle als Funktionen der Randbedingungen und vieles mehr. In den Kapiteln VIII und IX werden Strömungen mit der MACHschen Zahl 1 und in der Nähe von 1 behandelt und an instruktiven Beispielen erklärt. Das Kapitel XI ist den achsensymmetrischen Strömungen gewidmet und bringt einen Überblick über Untersuchungen des Verfassers selbst. Den Abschluß dieses sehr empfehlenswerten Buches bilden ausführliche Literatur- und Sachverzeichnisse, die einen Überblick über das bestehende Schrifttum verschaffen sollen. P. URBAN, Graz

Kristallchemie und Kristallphysik metallischer Werkstoffe. Von F. HALLA. Dritte Auflage. Leipzig: J. A. Barth. 1957.

Die dritte Auflage des bekannten Lehrbuches von HALLA bedarf eigentlich keiner besonderen Empfehlung mehr. Bei der stets steigenden Ausdehnung und Bedeutung der Metallkunde ist ein echtes Bedürfnis für eine zusammenfassende Darstellung der Grundlagen, wie sie hier vorliegt, sicher gegeben. Das Werk ist nicht nur für den Techniker, für den es in erster Linie geschrieben ist, sondern auch für den Physiker und Chemiker in gleicher Weise von Interesse.

Der rasche Fortschritt der Forschung seit der zweiten Auflage (1951) hat seinen Niederschlag in zahlreichen Änderungen und Erweiterungen gefunden. Die bewährte Anlage des Buches wurde dabei im wesentlichen beibehalten. Alle Eigenschaften der Metalle, soweit sie mit dem kristallinen Zustand zusammenhängen, sind berücksichtigt, wobei für den Umfang der einzelnen Kapitel offenbar weniger die Rücksicht auf technische Anwendungen als der Wunsch maßgebend war, ein möglichst gleichmäßiges Bild der Grundlagen zu geben. Die atomistische und makroskopische Betrachtungsweise halten sich dabei etwa die Waage.

Das ganze Buch ist einfach, klar und leicht verständlich geschrieben. Das muß als besonderer Vorzug hervorgehoben werden. Viele Leser werden auch das wesentlich erweiterte Literaturverzeichnis begrüßen. G. POROD, Graz

Handbuch der Physik - Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. FLÜGGE.

Band XXVIII: Spektroskopie II. Mit 223 Textabb., VI, 448 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. Geb. DM 98.—, Subskr.-Preis DM 78.40.

Der vorliegende Handbuchband, erschienen vor dem Band Spektroskopie I, beginnt mit einem Kapitel über eines der modernsten Teilgebiete, die Mikrowellen-Spektroskopie, geschrieben von Prof. W. GORDY. Ein kurzer Abschnitt betrifft den Aufbau von Mikrowellen-Spektrometern. Anschließend werden die Molekülspektren im Mikrowellen-Gebiet, später die schwieriger zugänglichen Mikrowellen-Atomspektren behandelt. Unter letzterem Titel faßt man so verschiedene experimentelle Untersuchungen, wie die der LAMB-SHIFT, der Übergänge zwischen verschiedenen Anregungsstufen von Positronium und der paramagnetischen Resonanz zusammen. Die magnetische Resonanz der Elektronen in Festkörpern nimmt einen verhältnismäßig breiten Raum innerhalb des Artikels ein. Theoretische Ansätze und Ergebnisse beschränken sich durchwegs auf das zum Verständnis der Effekte notwendige Minimum. Im Gegensatz zu diesem ersten und wohl allgemein-physikalisch derzeit interessantesten Kapitel der Spektroskopie, das kaum ein

Dezenium alt ist, handelt es sich bei den „kontinuierlichen Spektren“ (W. FINKELNBURG und TH. PETERS) schon um ein relativ altes Gebiet. Hier umfaßt das Schrifttum schon mehrere tausend Eingänge und es war nahezu selbstverständlich, daß dieser Abschnitt von Prof. FINKELNBURG mitverfaßt wurde, der schon 1938 die umfangreichste Monographie über dieses Gebiet veröffentlicht hatte. Es wurde deshalb auch nur auf Teile der Kontinuaforschung näher eingegangen, auf denen seit 1938 grundsätzliche Fortschritte erzielt worden sind. Dies sind vor allem die eng zusammenhängenden Fragen der Elektronenkontinua, der Hochtemperaturlichtbogen und Plasmen, und wohl auch die astrophysikalisch interessierenden Kontinua, über die jedoch ebenfalls nur ein kurzer Überblick gegeben wird, da die ausgezeichnete Monographie von UNSÖLD dies rechtfertigt. Nach einer theoretischen Einführung in die Grundbegriffe der Strahlungstheorie wird in sehr anschaulicher Weise die Entstehung und Bedeutung der Elektronenkontinua klargestellt. Die formale Behandlung baut sich nach wie vor auf der klassisch-korrespondenzmäßigen Theorie von KRAMERS auf, es wird jedoch auch ein Überblick über die wellenmechanische Theorie gegeben, die ja im Falle diskret-kontinuierlicher Elektronenkontinua unumgänglich ist. Der zentrale Teil der Abhandlung gruppieren sich um das eigentliche Arbeitsgebiet von Prof. FINKELNBURG, die Kontinua stromstarker Gasentladungen. Von den Molekül-Kontinua werden, ebenfalls nach einem sehr klaren und an den Stil der „Atomphysik“ erinnernden einführenden Abschnitt, die kontinuierlichen Spektren zweiatomiger Moleküle besprochen. Eine Übersicht über die kontinuierlichen Gasspektren und die Erzeugungsmethoden der Emissionsspektren beschließt den ausgezeichneten Artikel.

E. FICK und G. Jos verfaßten den Artikel über Kristallspektren. Nach einer, vielleicht etwas zu kurz geratenen Einführung in die experimentellen Fragen wird die im wesentlichen von BETHE stammende Theorie der Termbeeinflussung durch ein Kristallfeld erläutert, wozu die wichtigsten Sätze aus der Darstellungstheorie endlicher Gruppen als Prerequisit übersichtlich zusammengestellt wurden. Der gruppentheoretischen Behandlung des Problems wird das analytische Verfahren von HELLWEGE zur Seite gestellt, in welchem von den Elektroneneigenfunktionen des Kristallgitters, bzw. ihrer nullten Näherung ausgegangen wird. Die Forderung der Ausführbarkeit bestimmter Deckoperationen führt zur Einführung sogenannter Kristallquantenzahlen, die die Aufhebung der Entartung beschreiben. Die Größe der Aufspaltung wird in einem eigenen Abschnitt besprochen und an Beispielen aus der Eisenreihe und den seltenen Erden ihre praktische Berechnung gezeigt. Auf weitere Abschnitte über den ZEEMAN-Effekt in Kristallen, die Überlagerung von Gitterschwingungsfrequenzen, Temperatur- und Druckbeeinflussung der Kristallspektren, Kristallhyperfeinstruktur, kann hier aus Platzgründen nicht eingegangen werden. Die Ergebnisse der Kristallspektroskopie wurden übersichtlich am Schluß des Artikels zusammengestellt. Wie z. B. auch aus dem ersten und dritten Kapitel dieses Handbuchbandes zu ersehen ist, spielt die Aufspaltung von Spektrallinien im Magnetfeld in verschiedensten Teilgebieten der Spektroskopie eine dominierende Rolle. Den Grundlagen dieses Effektes ist daher ein eigener Abschnitt, geschrieben von VAN DEN POSCH gewidmet worden. Die Fragen des ZEEMAN-Effektes werden hier am Beispiel der Atomspektren erläutert. Den Schluß des Bandes bildet eine Abhandlung über natürliche optische Aktivität, verfaßt von Prof. P. MATHIEU. Da dieses Gebiet in prinzipieller Hinsicht als abgeschlossen bezeichnet werden kann, ist es besonders zu begrüßen, daß neben einer Übersicht über die Meßmethodik auch die historische Entwicklung des Gebietes und die Stellung der verschiedensten Theorien hinsichtlich einer praktischen Berechnung der optischen Aktivität und der Rotationsdispersion in den Vordergrund der Betrachtung gerückt ist.

H. STIPPEL, Graz

Handbuch der Physik — Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. FLÜGGE. Band XXXIX: Bau der Atomkerne. Mit 119 Textabb., VI, 566 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. Geb. DM 125.—, Subskr.-Preis DM 100.—.

Der erste Artikel ist dem Zwei-Nucleonen-Problem gewidmet und stammt von LAMEK HULTHÉN. Nach einer kurzen Einleitung und Zusammenfassung der experimentellen Daten wird die Mesonentheorie im Zusammenhang mit der Wechselwirkung zweier Nukleonen behandelt. Da das theoretische Potential auf Grund der Mesonentheorie nicht befriedigend ist, werden phänomenologische Kernpotentiale eingeführt, welche die mathematischen Schwierigkeiten vereinfachen und das wesentliche Verhalten wiedergeben. Zuerst werden die niederenergetischen Phänomene behandelt, wobei die Interpretation durch zentrale Kräfte berücksichtigt wird. Hier findet man vor allem das Deuteronproblem, Neutron-Protonstreuung und die Proton-Protonstreuung. In ausführlichen Tabellen werden die wichtigsten Parameter für die Bestimmung der effektiven Reichweite und Phasenanalyse bereitgestellt. Hieran schließt sich die Behandlung niederenergetischer Phänomene unter Zugrundelegung von Tensorkräften.

Der Abschnitt VI ist den Streuprozessen gewidmet und behandelt die Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld, Neutron-Protoneinfang, Photozerfall des Deuterons und Austauscheffekte. Nach diesem Abschnitt werden die hochenergetischen Probleme erörtert, die in der letzten Zeit an Wichtigkeit stark zunommen haben. Besonders die Theorie polarisierter Nukleonenstrahlen und die Analyse von Polarisationsmessungen, sowie das Problem der Ladungsunabhängigkeit werden übersichtlich und klar diskutiert. Den Abschluß bildet ein mathematischer Anhang, der die Variationsprinzipien von HULTHÉN und SCHWINGER mit ihren Verallgemeinerungen bringt. Ein sorgfältiges Literaturverzeichnis stellt das Schrifttum der letzten Jahre zusammen, um eine Vertiefung des Studiums an Hand der Originalliteratur zu ermöglichen.

Der 2. Artikel bespricht das Dreikörperproblem in der Kernphysik und wurde von MARIO VERDE verfaßt. Schon in der klassischen Physik bildet bekanntlich das Dreikörperproblem der Himmelsmechanik eines der schwierigsten Kapitel und kann nur durch Näherungen gelöst werden. Trotzdem bezieht es sich auf eine einheitliche potentielle Energie zwischen den Körpern, welche auf dem NEWTONSchen Gravitationsgesetz fußt. In der Atomphysik ist die Situation bei dem Dreikörperproblem wesentlich schwieriger, da man nicht einmal die Wechselwirkung zwischen zwei Nukleonen vollkommen beherrscht. Der Hauptzweck des Studiums von Mehrkörpersystemen in der Kernphysik kann daher nur einer Verbesserung unserer Kenntnisse der Wechselwirkung zwischen den Nukleonen dienen. In den ersten zwei Abschnitten gibt der Verfasser eine Klassifikation der Spin-Eigenzustände und verschiedene algebraische Relationen zur Ableitung der Bewegungsgleichungen für die räumlichen Eigenfunktionen. Dann werden die gebundenen Zustände von H^3 und He^3 , sowie die magnetischen Momente behandelt. Auch die Bindungsenergie sowie die Rolle der Tensorkräfte bei der Bindung werden erörtert, ferner die kontinuierlichen Zustände von 3 Nukleonen im Orts- und Impulsraum, sowie die Wirkung von Tensorkräften bei Streuproblemen und die Beugungstheorie. Eine wichtige Rolle spielt bekanntlich auch die Ladungssymmetrie bei Kernkräften und die Behandlung der elektromagnetischen Wechselwirkung, welche diesen sehr leserwerten Artikel beschließen.

Der 3. Artikel, welcher die Verteilung der Materie und Ladung innerhalb der Atomkerne gewidmet ist, stammt von DAVID LAWRENCE HILL. In den letzten Jahren haben unsere Kenntnisse der Kerndichte rasch zugenommen. Der Verfasser bringt eingangs einen kurzen Überblick über die Größe der Nukleonen bzw. Kerne, sowie über die Definition der wichtigsten Begriffe.

Dann behandelt er in den ersten Abschnitten die elektrischen Messungen der Kerngröße auf Grund der Elektronenstreuung, der gebundenen Elektronen, der μ -Mesonen und der COULOMBSchen Energie. Infolge der Fülle des gebotenen kann nur einzelnes herausgegriffen werden. Hier wird vor allem auf die Studien von HOFSTADTER und seinen Mitarbeiter über die elastische Streuung hochenergetischer Elektronen an Kernen eingegangen, welche zweifellos für unsere Kenntnisse von größter Bedeutung sind. Im 2. Abschnitt werden Messungen der Kernkräfte zur Bestimmung der Kerngröße erörtert, wobei die Neutron- und Protonstreuung an die Spitze der Betrachtungen gestellt wird. Auch die Streuung von Alphapartikeln, Alphazerfall und die Pion-Streuung finden hier eine kurze Behandlung.

Der 3. Abschnitt faßt die elektrischen Messungen wie Quadrupolmomente und Isotopenverschiebungen zusammen. Der letzte Abschnitt stellt alles Wissenswerte über die Theorie der Kerndichte zusammen, wobei die bekannten Untersuchungen von WEIZSÄCKER auf Grund des THOMAS-FERMI-Modells als Ausgangspunkt der Betrachtungen gewählt wird.

Der 4. Artikel von JAMES PHILIP ELLIOT und ANTHONY MILNER LANE, gibt eine Übersicht über das Schalenmodell der Kerne. Hier sei besonders auf die ausführlichen Tabellen stabiler Kerne hingewiesen, in welchen die neuesten Daten zusammengefaßt wurden. Auch den Verbesserungen des einfachen Schalenmodells wurde ein Augenmerk gewidmet. So wurde beispielsweise die Spin-Bahnkoppelung nicht übersehen. Auch auf die sehr lesenswerten Anhänge dieses Artikels sei besonders hingewiesen, welche der mathematischen Behandlung gewidmet sind und die verschiedenen gruppentheoretischen Hilfsmittel bereitstellen.

Der letzte Artikel umfaßte die verschiedenen Modelle der Kernstruktur und wurde von STEVEN A. MOSZKOWSKI redigiert. Er gibt eine schöne Übersicht über alle Modelle, wie Tröpfchenmodell, FERMI-Modell, optisches Modell, Alphapartikelmodell, Schalenmodell und Collectiv-Modell. Letzteres, welches von A. BOHR und B. R. MOTTELSON entwickelt wurde, findet eine besonders ausführliche Behandlung. Zuerst werden die Kernwellenfunktionen gegeben, woran sich eine Erörterung der Energiespektren schließt. Dann werden die Kernmomente definiert und die Übergangswahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Übergänge bestimmt. In vier Abschnitten diskutiert der Verfasser die innere Bewegung der Nukleonen in deformierten Kernen, wobei das Potential näherungsweise als anisotropes harmonisches Oszillatorenpotential zugrunde gelegt wird. Die letzten Abschnitte behandeln die kollektiven Bewegungsgleichungen und die Beziehungen zwischen inneren und kollektiven Bewegungen, sowie die Beziehungen zwischen dem Kollektiv-Modell und dem Schalenmodell. Ein Anhang bringt die wichtigsten D-Funktionen, welche als Transformationsfunktionen der Kugelfunktionen bei endlichen Drehungen definiert werden. Der ausgezeichnete Artikel schließt mit einer allgemeinen Literaturübersicht.

Auch dieser Band des Handbuchs der Physik reiht sich würdig an die bereits erschienenen an und stellt dem Herausgeber wie dem Autoren das beste Zeugnis aus.

P. URBAN, Graz

Physical Optics. Von R. A. Houstoun. Mit 192 Textabb., 16 Tafeln, X, 300 S.
London und Glasgow: Blackie & Son Ltd. 1957. 40 s.

Das vorliegende Buch widmet der Verfasser einerseits solchen Studierenden, die sich eingehender mit der physikalischen Optik befassen wollen und andererseits den bereits im Beruf stehenden Naturwissenschaftlern und Technikern, die für ihre Arbeit einige Kenntnisse auf diesem Gebiet benötigen. Deshalb, und infolge des geringen Umfangs des Buches werden die elementaren Dinge vorausgesetzt. Trotzdem sind die Ansprüche nicht hoch, da mathematische Ausführungen knapp

gehalten sind. Der Autor versucht vielmehr durch ausführliche Beschreibungen und graphische Konstruktionen die Materie anschaulich zu gestalten.

Im ersten Kapitel behandelt der Autor die geometrische Optik. Hier wäre vielleicht, dem Inhalt des übrigen Buches entsprechend, eine kurze Behandlung der Wellentheorie der optischen Abbildung sinnvoller gewesen. Die beiden nächsten Kapitel behandeln die Interferenz vom Biprismen-Typ, bzw. vom NEWTON-Ringtyp. Es folgen zwei Abschnitte über FRAUNHOFERSCHE und FRESNELSCHE Beugung. Die weiteren Kapitel betiteln sich: Das Beugungsgitter und die Vielfach-Interferometrie. Absorption, Streuung, Dispersion. Doppelbrechung und Polarisation. Die Ausbreitung des Lichtes in Kristallen. Die elektromagnetische Theorie. Spektroskopie. Photometrie und Beleuchtung. Farbe und das Auge. Photochemie und Photographie. Lichtgeschwindigkeit, Äther und Relativität. Quantentheorie. Ein Referenzverzeichnis sowie ein kurzes Sachwörterverzeichnis beschließen das Buch.

A. PURGATHOFER, Wien

Fundamentals of Optics. Von F. A. JENKINS und H. E. WHITE. Dritte Auflage.

Mit 420 Textabb., VII, 637 S. New York-Toronto-London: Mc Graw-Hill Book Comp., Inc. 1957. 64 s.

Mit diesem Werk erscheint ein besonders in den angelsächsischen Ländern bekanntes und beliebtes Lehrbuch der Optik in dritter Auflage. Im Gegensatz zur gründlich revidierten zweiten Auflage von 1950 wurde diesmal auf größere Änderungen verzichtet und es wurden bloß an einigen Stellen Vereinfachungen und Modernisierungen vorgenommen, so z. B. manche mathematischen Ableitungen durchsichtiger gestaltet und manche weniger wichtige Kapitel zu Gunsten aktuellerer oder schwierigerer gekürzt. Ebenso wurden in der Neuauflage die atomophysikalischen Aspekte der Optik stärker hervorgekehrt und sogar ein ganz kurzer Abriss der Quantenoptik angefügt.

Die Einheitlichkeit in Auffassung und Stil und die voraussetzungslose Schreibweise machen dieses Werk zu einem guten Lehr- und Studierbuch. Zur Vertiefung des Gelesenen sind am Ende jedes Kapitels Beispiele angegeben. Diejenigen, die sich mit einem speziellen Problem näher beschäftigen wollen, finden Referenzen als Fußnoten. Nicht zuletzt sei auf die außerordentlich reichhaltige Illustration hingewiesen.

Der 1. Teil des Buches beschäftigt sich mit der geometrischen Optik und umfaßt 188 Seiten. Hier findet man in 10 Kapiteln das wichtigste über Brechung und Reflexion an ebenen und sphärischen Flächen, sowie deren Verwendung als Elemente der konstruktiven Optik. Je ein Kapitel ist den Linsenfehlern und den optischen Instrumenten gewidmet. Der 2. Teil „Physikalische Optik“ umfaßt 418 Seiten. Die ersten beiden Kapitel behandeln das Licht als einfache harmonische Bewegung einschließlich deren Superposition. Die folgenden sechs Abschnitte bringen die Anwendung dieser Modellanschauung auf Interferenz und Beugung. Das nächste Kapitel ist der Lichtgeschwindigkeit gewidmet, dem eines über den elektromagnetischen Charakter des Lichtes mit einem kurzen Abriss der MAXWELLSchen Theorie folgt. Es schließen sich Kapitel mit folgenden Titeln an: Lichtquellen und ihre Spektren. Absorption und Streuung. Dispersion. Die Polarisation des Lichtes. Reflexion. Doppelbrechung. Interferenz des polarisierten Lichtes. Optische Aktivität. Magneto- und Elektrooptik.

Der 3. Teil gibt einen kurzen, 15 Seiten langen Überblick über die Quantenoptik. Ein Sachregister ergänzt das Buch.

A. PURGATHOFER, Wien

Landolt-Börnstein, Zahlenwerte und Funktionen aus Physik, Chemie, Astronomie, Geophysik und Technik. Sechste Auflage. Band IV: Technik. Teil 3:

Elektrotechnik-Lichttechnik-Röntgentechnik. Herausgegeben von E. SCHMIDT. Mit 2117 Textabb., XV, 1076 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. Geb. DM 396.—.

Im Anschluß an den bereits 1955 erschienenen Teilband 1, liegt heute der Teilband 3 des berühmten LANDOLT-BÖRNSTEIN-Werkes vor. Dieser umfaßt die Gebiete der Elektrotechnik (S. 1—843), der Lichttechnik (S. 844—967) und der Röntgentechnik (S. 968—1076). Den größten Teil des Raumes nimmt natürlich die Elektrotechnik ein, was einsteils infolge der großen Bedeutung dieses Gebietes, anderseits infolge der leichten Meßbarkeit ihrer Daten verständlich ist. Hier wieder behandelt der größte Teil die elektrischen Isolierstoffe. Diese Stoffgruppe umfaßt eine enorme Mannigfaltigkeit von Stoffarten mit einer Vielzahl von Meßgrößen, wobei auch nichtelektrische Größen eine Rolle spielen, da sie über die praktische Verwendbarkeit Aussagen machen. Die elektrischen Leiter umfassen vorwiegend die Metalle und die in letzter Zeit wichtig gewordenen Halbleiter. Von den Metallen hat nur eine bestimmte Gruppe die für die Technik so wichtigen magnetischen Eigenschaften.

Die Kapitel Lichttechnik und Röntgentechnik werden in Aufbau und Gliederung verschieden angeordnet. So umfaßt die Röntgentechnik alles, von der medizinischen Röntgentechnik an bis zu den Strukturuntersuchungen, bei welch letzteren natürlich auch auf die Methodik der Messungen Rücksicht zu nehmen war. Um den Band auch Nichtspezialisten verständlich zu machen, wurden in den Kapiteln sorgfältig redigierte Einleitungen an die Spitze gestellt, in denen die benutzten Begriffe und die Bezeichnungsweise erläutert wird. Übersichtstabellen erleichtern die Orientierung zum Gebrauch des Werkes, das sehr verschiedene Gebiete in einer Darstellung zusammenfaßt. Dabei kommt es vor, daß die einzelnen Fachgebiete oft eine sehr verschiedene Darstellungsweise beanspruchen, die aus ihrer Entwicklung heraus verständlich ist und noch nicht durch internationale Vereinbarungen vereinheitlicht wurde. Die Verfasser mußten sich dabei an die im einzelnen eingebürgerte Ausdrucksweise halten, um die Verwendung zu erleichtern. Außerdem wurden von allen zur Verfügung stehenden Daten immer die vertrauenswürdigsten ausgesucht, was von den Bearbeitern kritische Durchsicht und viel Sachkenntnis verlangt. Die Auswahl des Stoffes, ebenso wie die Entscheidung über die technische Bedeutung des einen oder anderen ist natürlich eine Ermessensfrage, die von der persönlichen Ansicht der einzelnen Fachbearbeiter abhängig ist. Es ist daher nur zu begreiflich, daß sicherlich vom Standpunkt des Lesers hier und da Lücken gefunden werden dürften, was aber infolge der enormen Ausdehnung der einzelnen Gebiete nur zu verzeihlich ist.

Es ist zu hoffen, daß die große Mühe der Bearbeiter den Benutzer zum Vorteil und zu Arbeitsersparnis verhelfen wird. Die Ausführung stellt dem Springer-Verlag ein hervorragendes Zeugnis aus und ist in jeder Hinsicht als mustergültig zu bezeichnen.

P. URBAN, Graz

Die Mikrophotographie. Von K. MICHEL. (Die wissenschaftliche und angewandte Photographic: Band 10.) Mit 550 teils farbigen Textabb., XXXII, 740 S. Wien: Springer-Verlag. 1957. Geb. S 840.—, DM 140.—, \$ 33.30, sfr. 143.40.

Seit beinahe 20 Jahren ist eine zusammenfassende systematische Darstellung des gesamten Gebietes der Mikroskopie und Mikrophotographie in deutscher Sprache nicht mehr erschienen. Gerade aus diesem Grunde wird es wohl von allen jenen Wissenschaftlern und Technikern, denen das Mikroskop zum unentbehrlichen Handwerkzeug geworden ist, sehr begrüßt werden, daß der Herausgeber des Handbuches der Photographic K. MICHEL — als langjähriger Leiter der Abteilung für Mikroskopie bei CARL ZEISS selbst ein hervorragender Fachmann — sich ent-

schlossen hat, sein Wissen und seine Erfahrungen, seine eingehenden Informationen über die modernsten optischen Industrieerzeugnisse und seine umfangreichen Literaturkenntnisse der Fachwelt in Form eines großen Handbuchs zu vermitteln.

Praktisch ist das Mikroskop heute schon in jedem Laboratorium ein wichtiges Hilfsmittel geworden und in sehr vielen Fällen spielt es auch schon in der industriellen Fertigung eine bedeutende Rolle. Aus dem Bestreben heraus, die Beobachtungsergebnisse photographisch festzuhalten, entstand eine eigene Technik der Mikrophotographie, die durch das verständnisvolle Mitgehen in der Entwicklung moderner mikrophotographischer Geräte durch die optische Industrie eine wertvolle Förderung erfuhr. Es gibt heute kaum mehr mikrophotographische Aufgaben, und sollten sie noch so schwierig erscheinen, die mittels moderner Methoden bewältigt werden können; dafür hat Forschung und Industrie in reichlichem Maße gesorgt.

Es erscheint durchaus verständlich, daß aus diesem Grunde gerade der zweite Teil des Buches mit seinen nahezu 350 Seiten der umfangreichste ist, beinhaltet er doch den Abschnitt der „Geräte zur Mikrophotographie“. Wegen der großen Zahl der zu berücksichtigenden Geräte und Methoden war es von vornherein unmöglich, sämtliche in der Mikrophotographie eine Rolle spielenden Apparate aller Herstellfirmen zu behandeln. Daher wurde zur prinzipiellen Darstellung jeweils eine besonders charakteristische Apparatetype einer Firma, meist der Firma Zeiss, gewählt und dann die Erzeugnisse der anderen Firmen in tabellarischen Übersichten zusammengefaßt.

Um auch vom übrigen Buchinhalt zu sprechen, sei zunächst der erste Abschnitt erwähnt, der in klarer und prägnanter Form die Grundlagen zum Verständnis der optischen Mikrogeräte liefert. Ausgehend von der Linse und der Linsengleichung über die Grundformen optischer Geräte und die Beleuchtung bis zur Interferenz- und (Phasen-)Kontrastmikroskopie enthält dieser Abschnitt alles Wissenswerte über diese Sachgebiete. Zahlreiche sehr gute schematische Darstellungen erleichtern das Verständnis. Angeschlossen sind dem Abschnitt auch einige allgemeinere Hinweise über den photographischen Prozeß bei Schwarz-weiß- und Farbphotographie.

Den letzten Teil des Werkes bilden die 200 Seiten des dritten Abschnittes, der „Praxis der Mikrophotographie“. Hier spricht der Praktiker zu den Praktikern: Bild- und Beleuchtungseinstellung, Belichtungszeit, Fluoreszenzmikroskopie, Arbeiten mit polarisiertem Licht, Stereoaufnahmen, Farb-Mikrophotographie, Verwendung von infrarotem und ultraviolettem Licht usw. seien nur wenige Stichworte aus diesem Teil, der schließlich mit einem Kapitel über die Verwendung von Laufbildkameras und Elektronenblitz schließt. Über 700 Literaturzitate und ein ausführliches Namens- und Sachverzeichnis vervollständigen dieses vorzügliche Buch. Für Druck und Ausstattung verdient der Verlag vollste Anerkennung.

Der Rezensent ist überzeugt, daß dieses wertvolle Handbuch schnell und mit bestem Erfolg in den Arbeitsstätten des Mikroskopikers Aufnahme finden und ihm in Ergänzung zu seinem Mikroskop ein zuverlässiger und unentbehrlicher Ratgeber werden wird.

K. OROSZY, Graz

Integraltafeln zur Quantenchemie. Von H. PREUSS. Band II. VII, 143 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1937. Geb. DM 36.—.

Der nunmehr erschienene zweite Band der Integraltafeln zur Quantenchemie stellt eine Fortsetzung des bereits erschienenen ersten Bandes dar und behandelt die heteronuklearen Einelektron-Integrale. Die Wichtigkeit des Werkes braucht wohl nicht besonders betont zu werden, da die Verwendung der Quantenmechanik in der Chemie in den letzten Jahren stark zugenommen hat. Auch in diesem

Band wurde eine sorgfältige Zusammenstellung der schon publizierten Tabellen- und Formelsammlungen aufgenommen, die der Verwendung und dem Vergleich der verschiedenen Bezeichnungsweisen sehr zustatten kommen. Es kann daher genau so wie bei der Besprechung des ersten Bandes die Verbreitung dieses Werkes nur aufs wärmste empfohlen werden.

P. URBAN, Graz

Report of the Meeting on Semiconductors held by the Physical Society in Collaboration with British Thomson-Houston Ltd. Rugby in April 1956. Mit Textabb., 153 S, 20 s.

Es handelt sich um einen Bericht über die englische Halbleiter-Tagung vom April 1956, auf der zahlreiche interessante Fragen der Halbleiterphysik behandelt wurden. Die Broschüre umfaßt 23 Referate, wobei sowohl die Theorie als auch die Praxis zu Wort kommt. So werden z. B. die Lebensdauer von Ladungsträgern und ihre Temperaturabhängigkeit, die Theorie der Gleichrichtung, der Photoeffekt und die magnetische Kernresonanz erörtert. Im Hinblick auf die Anwendungen sind Referate über Transistoren für hohe Frequenzen und über Hochleistungs-gleichrichter zu erwähnen. Ein Beitrag ist der Bestimmung kleinsten Spuren von Verunreinigungen gewidmet, ein Problem, das für die Halbleiterphysik von großer Bedeutung ist. Jeder Artikel schließt mit einem ausführlichen Literaturverzeichnis.

L. HANKE, Graz

Über den Aufbau der Zinksulfid-Luminophore. Von N. RIEHL und H. ORTMANN. Weinheim/Bergstr.: Verlag Chemie, GmbH. 1957. DM 9.80.

Die vorliegende Monographie wendet sich vor allem an den an Lumineszenz-erscheinungen interessierten Kristallchemiker. Die beiden Forscher berichten darin in klarer prägnanter Art von ihren systematischen Untersuchungen zur Aufklärung der chemischen Struktur der „Leuchtzentren“ der aktivatorhältigen und aktivatorfreien Zinksulfide. Nach einer kurzen Diskussion über die bisherigen Vorstellungen zum Bau der Leuchtzentren wird sofort zu den eigenen Untersuchungen übergegangen. Äußerst erfolgreich werden die Einflüsse der verschiedenen zur Kristallbildung führenden Komponenten auf die Lumineszenzfähigkeit untersucht. Dabei entsteht folgendes Bild. Aktivatorfreies ZnS ist nur lumineszenzfähig, wenn Sauerstoff bei der Bildung beteiligt ist, während kupferhältige Leuchtzentren sich auch ohne Sauerstoff bilden können. ZnS-Kristalle mit vollkommen fehlerfreier Gitterstruktur liefern auch bei Cu-Einwanderung keine Lumineszenz. Darauf aufbauend entwickeln die beiden Autoren ihre sehr anschauliche Modellvorstellung von den Schwefelfehlstellen im Gitter, die in erster Linie für die Bildung von Leuchtzentren ausschlaggebend sind. Im Rahmen dieser Modellvorstellung finden sowohl grüne als auch blaue Lumineszenz des ZnSCu sowie die des aktivatorfreien ZnS ihre Begründung. Auch die von den Autoren beobachteten Umschlagserscheinungen finden auf Grund der von ihnen angenommenen Struktur der Leuchtzentren ihre Erklärung. Dabei verdienen die bei den Untersuchungen benützten Erscheinungen des Aus- und Einwanderns von Aktivatoratomen durch Diffusion besondere Beachtung.

Abschließend kann gesagt werden, daß diese Monographie einen überaus wesentlichen Beitrag zur Klärung der chemischen Struktur der Leuchtzentren der ZnS-Luminophore darstellt und man kann mit Recht auf die angekündigte abschließende Diskussion dieses Fragenkreises gespannt sein. N. PUCKER, Graz

Mechanik der deformierbaren Medien. Von A. SOMMERFELD †. Vierte Auflage. Bearbeitet und ergänzt von E. FUES. (Vorlesungen über theoretische Physik: Band II.) Mit 88 Textabb., XII, 372 S. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1957. Geb. DM 15.—.

- Die nunmehr vorliegende vierte Auflage des zweiten Bandes der Vorlesungen über theoretische Physik von ARNOLD SOMMERFELD wurde von E. FUES besorgt. Man kann sagen, daß keiner berufener gewesen wäre als gerade E. FUES, diese schwierige Arbeit zu übernehmen und in so mustergültiger Weise durchzuführen. Denn einerseits mußten doch infolge des Fortschrittes unserer Wissenschaft an verschiedenen Stellen Ergänzungen und Korrekturen angebracht werden, anderseits aber sollte der berühmte Stil SOMMERFELDS möglichst erhalten bleiben. Es mußte daher sehr behutsam zu Werk gegangen werden, was natürlich nur einem Autor gelingen konnte, der mit der Art SOMMERFELDS, seiner Schreib- und Denkweise sehr vertraut war. Die Durchführung dieser Grundsätze kann als sehr gelungen bezeichnet werden und erstreckte sich vor allem auf die Abschnitte über Grenzschichten und deren Ablösung sowie auf die Auftrieb- und Tragflügeltheorie. Die Darstellung der Plastizität im Paragraph 39 wurde in dankenswerter Weise von Herrn KRÖNER übernommen. Von den Zusätzen am Schluß des Werkes ist besonders auf jene über den Tensorkalkül hinzuweisen, die man als äußerst gelungen bezeichnen kann und welche besonders die Vektor- und Tensor-Differentiation in krummlinigen orthogonalen Koordinaten dem Leser in verständigster Weise näherbringt. Es ist auch darauf hinzuweisen, daß die alte SOMMERFELDSche Symbolik der Vektoranalysis durch die heute international verbreitete und besonders in den angelsächsischen Ländern gepflegten Zeichen ersetzt wurde, was dem Studium des Werkes sehr zustatten kommen dürfte.

Daß gerade die „Vorlesungen über theoretische Physik“ von Arnold SOMMERFELD unseren Studierenden naturwissenschaftlicher Richtung besonders zu empfehlen sind, braucht wohl nicht besonders betont zu werden.

P. URBAN, Graz

Elektronenröhren. Bearbeitet von M. J. O. STRUTT. (Lehrbuch der drahtlosen Nachrichtentechnik: 3. Band.) Mit 456 Textabb., XV, 391 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. Geb. DM 58.50.

Dieses Buch ist der dritte Band des von N. VON KORSHENOWSKA und W. T. RUNGE herausgegebenen Lehrbuches der drahtlosen Nachrichtentechnik und wird seinem recht allgemein gehaltenen Titel wirklich völlig gerecht. Der Verfasser, der auf langjährige Industrieerfahrung zurückblicken kann, hat hier den gesamten Problemkreis der Elektronenröhren von allen Seiten beleuchtet. Eine Abgrenzung des Inhaltes ist durch die Wellenlänge gegeben, indem ausgesprochene dm- und cm-Wellen-Röhren nicht berücksichtigt wurden, da solche infolge der grundsätzlichen Verschiedenheit ihrer Konstruktion gegenüber der der übrigen Röhren eine gänzlich gesonderte Behandlung erfordern würden. Von dieser Einschränkung abgesehen, wird der Begriff der Elektronenröhre sehr weit gefaßt und erstreckt sich z. B. ebenso auf Fernsehbild- und Aufnahmeröhren wie auch auf Transistoren.

Das Buch ist in drei große Abschnitte gegliedert:

- A. Elektrophysikalische und technische Grundlagen,
- B. Elektronenlenkung mittels elektromagnetischer Felder,
- C. Daten und Eigenschaften praktisch verwendeter Elektronenröhren.

Der Abschnitt A behandelt in knapper Form die Elemente der Elektrodynamik und des Atombaues und geht auch kurz auf die Wellennatur des Elektrons und die damit verknüpften Phänomene ein. Daran schließt sich ein Überblick über die Leitungsmechanismen in Halbleitern und Metallen und über die verschiedenen Arten von Elektronenemission. Es folgt ein ausführlicheres Kapitel über elektrische und magnetische Felder. Einen beträchtlichen Beitrag zum Werk des Buches liefert der letzte Teil dieses Abschnittes, welcher Fragen der Werkstoffe und Verfahrenstechnik gewidmet ist.

Im Abschnitt B werden Kennlinien und Eigenschaften der verschiedensten Röhrentypen einer eingehenden Diskussion unterworfen, wobei auch die Elektronenoptik ausgiebig zu Wort kommt. Gerade dieser Teil dürfte auch dem versierten Fachmann vieles zu bieten haben.

Der Abschnitt C schließlich bildet keineswegs, wie seine Überschrift vielleicht vermuten lässt, einen tabellenartigen Anhang mit speziellen Röhrendaten. Zu diesem Zweck stehen gute Röhrentabellen und -Handbücher zur Verfügung. Hier werden vielmehr die Eigenschaften verschiedener Röhrenarten vom praktischen Standpunkt aus untersucht. Geordnet nach ihrem Verwendungszweck wird das Verhalten der Röhren an Hand zahlreicher Schaltungsbeispiele erläutert. Bei der Entwicklung von Röhrenschaltungen wird vor allem dieser letzte Abschnitt besonders zu schätzen sein, da er zu einem besseren Verständnis mancher Zusammenhänge führen und damit oft zeitraubende Mißerfolge vermeiden kann.

Das Buch ist klar und verständlich geschrieben und durchaus geeignet, auch fernerstehenden Personen dieses interessante Gebiet zugänglich zu machen, obgleich es andererseits den Fachmann voll und ganz befriedigt. Es gebührt ihm daher ein Platz überall dort, wo man sich irgendwie — sei es nun grundlegend oder im Hinblick auf Anwendungen — mit Elektronenröhren befaßt. L. HANKE, Graz

Changes of State. A Mathematical-Physical Assessment. Von H. N. V. TEMPERLEY. Mit 72 Textabb., XI, 324 S. London: Cleaver-Hume Press Ltd. 1956. Geb. 50 s.

Der Verfasser beabsichtigt, allen an diesem „faszinierenden aber komplizierten Gebiet“ Interessierten zu helfen, sich zurechtzufinden. Es werden grundlegende Ähnlichkeiten zwischen verschiedenen Umwandlungstypen hervorgehoben, die oft erst in den letzten Jahren erkannt wurden. Ein Beispiel ist die formale Ähnlichkeit zwischen Ferromagnetismus und Verdampfung, auf die 1952 YANG und LEE hinwiesen. Das Buch erinnert in seinem Stil an Kolloquiumsvorträge, sowohl in der Auffassung des Themas als auch in der Benützung der formalen Hilfsmittel, die nur dort benützt werden, wo es zur Erläuterung der Gedankengänge notwendig ist. Das Werk ist sehr anregend geschrieben und enthält zahlreiche interessante Einzelheiten. Der Verfasser hält sich absichtlich dort kurz, wo ausführliche Darstellungen vorliegen, vermittelt aber eine persönliche Beziehung zum Thema, die in dem Rahmen der eigentlichen Lehr- und Handbücher vermißt werden könnte. Die Literaturzitate umfassen wenige representative Einzelarbeiten und Monographien, die für einen ersten Zugang empfehlenswert sind. Der Stoff verteilt sich wie folgt: Historical Introduction (5 S.), Classification of Changes of State (16 S.), Some General Consideration (30 S.), Evaporation and Liquefaction (45 S.), Fusion and Solidification (45 S.), Solutions, Order-Disorder in Alloys, Adsorption and Related Problems (58 S.), Ferromagnetism and Antiferromagnetism (55 S.), Ferroelectricity and λ -Point Anomalies in Solids (20 S.), Superconductivity (31 S.), The Transition of Liquid Helium (54 S.).

L. BREITENHUBER, Graz

Physik und Chemie der Grenzflächen. Von K. L. Wolf. Band I: Die Phänomene im allgemeinen. Mit 105 Textabb., VI, 262 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. Geb. DM 36.—.

In einer Zeit, in der die Atomphysik im engeren Sinne ein Superlativ zu werden droht, mutet die Physik der Grenzflächen recht „klassisch“ an. Der Verfasser hat in dem vorliegenden Buche, das eine Lücke in der deutschsprachigen neueren Literatur füllt, einen sehr überzeugenden Beweis der Aktualität dieses Themas gegeben. Während in der älteren physikalischen Literatur die mathematische Be-

handlung der Grundgleichungen der Darstellung eine gewisse Abgeschlossenheit verlieh, sind zahlreiche neuere Arbeiten durch die grundsätzliche und technische Wichtigkeit der Grenzflächen fester Phasen angeregt worden. Sie sind durch zahlreiche Schwierigkeiten besonders experimenteller Art gehemmt und geben dem Gebiet einen recht heterogenen Charakter. Die Stoffauswahl ist in Darstellungen geringeren Umfangs auch eine Frage des Geschmackes.

Der vorliegende Band strebt eine Darstellung der allgemeinen Grundlagen an, dem ein zweiter über die Phänomene im einzelnen folgen wird. Das Buch weist in der „allgemeinen Zielsetzung über FREUNDLICHs Kapillarchemie, in der systematischer Art der Betrachtung über ADAMS Physics and Chemistry of Surfaces hinaus“. Der Natur der Sache nach ist der Titel in diesem Band mehr durch physikalischen als chemischen Inhalt gerechtfertigt. Die experimentellen Methoden werden in einem Sechstel des Umfangs übersichtlich dargestellt und behandeln hauptsächlich die für Flüssigkeiten geeigneten Verfahren. Bei der großen Bedeutung der Verunreinigungen durch grenzflächenaktive Stoffe, wäre ein kurzer Abschnitt über die Thermodynamik der Konzentrationsabhängigkeit ganz nützlich gewesen.

Der Stoff gliedert sich in fünf Abschnitte: Grundlagen und Definitionen (16 S.), Die Oberfläche von Flüssigkeiten (103 S.), Die Oberfläche von festen Stoffen (35 S.), Die Grenzfläche von Flüssigkeiten und Festkörpern gegen Gase und Dämpfe (4 S.), Die Grenzfläche von Flüssigkeiten gegen Flüssigkeiten (26 S.), Die Grenzfläche von Festkörpern gegen Flüssigkeiten (58 S.), Hinweis auf die speziellen Phänomene (5 S.).

L. BREITENHUBER, Graz

Morphological Astronomy. Von F. ZWICKY. Mit 55 Textabb., IV, 299 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. Geb. DM 49.60.

Der bekannte, jetzt in den Vereinigten Staaten lebende Schweizer Astronom F. ZWICKY gibt in diesem Werk eine ausführliche Darstellung der bisher von ihm mit Hilfe der morphologischen Forschungsmethode in seinem Fachgebiet gewonnenen Ergebnisse und Ausblicke. Dabei stützt sich ZWICKY, der am Mt. Wilson und Mt. Palomar Observatorium tätig ist, in erster Linie auf eigene Beobachtungen.

Der Autor verfolgt mit diesem Buche zwei Ziele: Erstens möchte er dem Leser die morphologische Forschungsmethode, als die natürliche und ökonomische, auf völliger Vorurteilslosigkeit aufgebaute Denkweise, dem Leser näherbringen. Zweitens faßt er hier seine eben mit dieser Methode gewonnenen Ergebnisse in der Astronomie zusammen. Dabei werden eine Reihe für die moderne Kosmogonie wichtiger Erkenntnisse gewonnen, die der Autor zum Teil erstmalig hier publiziert. Es geht ihm dabei fast ausschließlich um das sehr aktuelle Problem der großräumigen Verteilung der Materie im intergalaktischen Raum. Dies spiegelt sich in den Titeln der einzelnen Kapitel deutlich wieder: 1. Morphological Research and Invention. — 2. Clouds and Clusters of Galaxies. — 3. The Large Scale Distribution of Galaxies and of Clusters of Galaxies. — 4. Kinematic and Dynamic Characteristics of the Large Scale Aggregates of Matter. — 5. Dimensional and Dimensionless Morphology in Cosmology. — 6. Morphological Features of Individual Galaxies. — 7. Morphological Astronomical Kaleidoscope. — 8. The Morphological Method and a priori Knowledge. The Magic Numbers.

Alles in allem ein sehr interessantes Buch, welches nicht nur den Astronomen, sondern sicherlich auch jeden naturwissenschaftlich interessierten Leser fesselt.

A. PURGATHOFER, Wien

Fortsetzung von der II. Umschlagseite

Formeln: Der Setzer versteht im allgemeinen nichts vom Sinn der Formeln und hält sich genau an die Vorlage. Korrekturen an gesetzten Formeln bedingen einen unverhältnismäßig großen Aufwand an Mehrarbeit. Unverhältnismäßig in bezug auf die geringe Mehrarbeit, die der Verfasser hat, wenn er Buchstaben und Formelzeichen deutlich und unmißverständlich schreibt, bzw. malt. — Die Formelzeichen sollen womöglich den AEF-Normen entsprechen oder den in den beiden Handbüchern der Physik verwendeten Zeichen angeglichen sein. — Längere mathematische Ableitungen sollen gegebenenfalls in einem mathematischen Anhang zusammengestellt werden; soweit gekürzt, daß der Fachmann den Rechengang übersehen und eventuell kontrollieren kann. Im Text ist raumsparende Schreibweise anzugeben.

wenden, also $(a + b)/c$ statt $\frac{a + b}{c}$ oder $e^{-E/kT}$ statt $e^{-\frac{E}{kT}}$.

Zitate ebenso wie Anmerkungen werden als Fußnoten mit durch die Arbeit fortlaufender Numerierung (zur Erleichterung der Rückverweisung, bzw. zur Vermeidung unnötiger Wiederholungen) gebracht. Als Zitatmuster (vergleiche die Handbücher oder die S.-B. der Akademie): A. J. DEMPSTER Nature 136, 180 (1955).

Autorenkorrekturen, das heißt nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie 10% der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Herausgeber, Schriftleitung und Verlag

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Fortsetzung von der IV. Umschlagseite

the Earth's Satellite in the USSR. — **A. Miele.** Optimum Burning Program as Related to Aerodynamic Heating for a Missile Traversing the Earth's Atmosphere. — **W. N. Neat.** The Problem of Variable Thrust. — **D. E. Okhotsimsky** and **T. M. Eneiev.** On the Establishment of an Artificial Satellite of the Earth in Orbit. — **D. E. Okhotsimsky, T. M. Eneiev, and G. P. Taratynova.** Determining the Time of Existence of the Artificial Earth Satellite and Studying Secular Perturbations of its Orbit. — **R. T. Patterson.** Vertical Recovery. Feasibility of the Physical Recovery of Scientific Research Payloads from Very-High-Altitude Near-Vertical Trajectories. — **N. V. Petersen.** Recovery Techniques for Manned Earth Satellites. — **R. E. Roberson.** Attitude Control of a Satellite Vehicle — an Outline of the Problems. — **D. C. Romiek, R. E. Knight, and S. Black.** Meteor, Jr., a Preliminary Design Investigation of a Minimum Sized Ferry Rocket Vehicle of the Meteor Concept. — **Ingeborg Schmidt.** Spaces of Potential Visibility of Artificial Satellites for the Unaided Eye. — **D. G. Simons.** Observations from the Manhigh II Balloon Capsule at 30 Kilometers. — **S. F. Singer.** Interplanetary Ballistic Missiles — A New Astrophysical Research Tool. — **A. E. Slater.** The Probability of Intelligent Life Evolving on a Planet. — **E. Stuhlinger.** Design and Performance Data of Space Ships with Ionic Propulsion Systems. — **M. Subotowicz.** Einige Optimalisationsprobleme in der Theorie der Stufenraketen und ein einfaches Verfahren zur Ermittlung der optimalen Parameter der Stufenraketen. — **H. N. Toftoy.** U. S. Army Support of Scientific Activities in Astronautics. — **S. N. Vernov, V. L. Ginzburg, L. V. Kurnosova, L. A. Razboronov, and M. I. Fradkin.** Study of the Primary Cosmic Radiation by Using Artificial Satellites of the Earth. — **F. L. Whipple.** The Meteoritic Risk to Space Vehicles. — **F. L. Whipple and J. A. Hynek.** Optical and Visual Tracking of Artificial Satellites. — **O. C. Winzen.** Ten Years of Plastic Balloons. — **O. C. Winzen.** The Manhigh II Balloon Operation. — **V. A. Yegorov.** Some Problems Relating to the Dynamics of the Flight to the Moon.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

Soeben erschien:

**VIIIth International Astronautical Congress
VIII. Internationaler Astronautischer Kongreß
VIII^e Congrès International d'Astronautique**

Barcelona, 1958

Proceedings / Bericht / Comptes rendus

Editorial Board / Herausgegeben von / Comité des Rédacteurs P. J. BERGERON, Paris; W. v. BRAUN, Huntsville/Ala.; K. A. EHRICKE, San Diego/Calif.; F. HECHT, Wien; J. MARIAL, Barcelona; E. SÄNGER, Stuttgart; K. SCHÜTTE, München; L. I. SEDOV, Moskva; L. R. SHEPHERD, Chilton; S. F. SINGER, College Park/Md.; Editor-in-Chief / Schriftleitung / Rédacteur en chef F. Hecht, Wien. Mit 233 Figuren. VII, 607 Seiten. Gr.-8°. 1958.

Ganzleinen S 750.—, DM 125.—, sfr. 128.—, \$ 29.75

*Vorzugspreis für Mitglieder der IAF (Internationalen Astronautischen Föderation)
und für Bezieher der „Astronautica Acta“*

Ganzleinen S 600.—, DM 100.—, sfr. 102.40, \$ 23.80

Inhaltsverzeichnis: J.-J. Barré. Essai de contribution à l'autopropulsion nucléaire. — J.-J. Barré. Essai de contribution à la propulsion ionique. — H. J. von Beckh. Multi-Directional G-Protection in Space Vehicles. — H. Bednarezyk. Über die Strömung in Zweiphasengemischen. — B. Bergqvist. The Weight of Minimum Cost Orbital Ferry Vehicles. — Th. P. Bün and F. A. Pereira. „Biospheric Index“, a Contribution to the Problem of Determination of the Existence of Extra-Solar Planetary Biospheres. — C. E. Cremona. Previsione tempestiva delle caratteristiche del moto di mobili aero-balistici nella cibernetica aeronautica. — W. O. Davis. Research Goals in Astronautics. — K. A. Ehricke. Instrumented Comets—Astronautics of Solar and Planetary Probes. — J. Gadomski. Die Sternenökospheren im Radius von 17 Lichtjahren um die Sonne. — C. Gazley, Jr., and D. J. Masson. Recovery of a Circum-Lunar Instrument Carrier. — S. J. Gerathewohl, O. L. Ritter, and H. D. Stallings, Jr. Producing the Weightless State in Jet Aircraft. — P. E. Glaser. On the Generation of Temperatures to 30,000° K. — F. G. Gravalos. A Method of Integrating the Equations of Motion of a Body Entering an Arbitrary Atmosphere with an Automatic Error Analysis. — H. Gutton. Pilotage d'un astronef par des moyens radioélectriques. — A. G. Haley. Space Law — The Development of Jurisdictional Concepts. — R. P. Haviland. The Communication Satellite. — G. Heinrich und W. Peschka. Über Stabilitätsuntersuchungen an flüssigkeitgetriebenen Raketenmotoren mit Hilfe des Verfahrens der „Harmo-nischen Balance“. — S. Herrick, R. M. L. Baker, Jr., and C. G. Hilton. Gravitational and Related Constants for Accurate Space Navigation. — J. Kaulbersz, R. Bilski, I. Koçyan, A. Ogiński, D. Wiecha, and J. Zbiegień. Alterations in Some Blood Reactions and in the White Cell Count during the Total Eclipse of the Sun in Poland 1954. — W. B. Klempner and E. T. Benedikt. Selenoid Satellites. — H. H. Koelle. Optimization Considerations for Orbital Payload Capabilities. — J. M. J. Kooy. On Relativistic Rocket Mechanics. — E. R. Manring and J. F. Bedinger. Sodium Emission at 140 km. — A. G. Masevich. Visual Observations of

Fortsetzung auf der III. Umschlagseite

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung